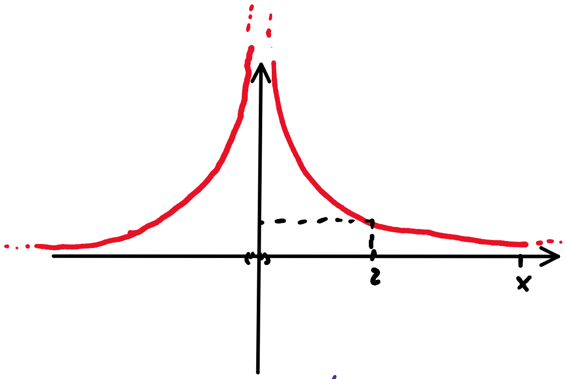
# MATEMATICA - LEZIONE 19

lunedì 4 novembre 2024 09:04

**LIMITI DI FUNZIONI**




$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$

$Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$= (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Vogliamo descrivere il comportamento di $f(x)$ quando $x$ si avvicina a determinati valori.

Ad esempio:

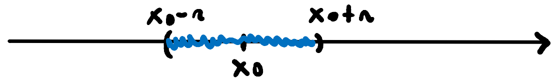
- Se $x$ è molto grande, $f(x)$ si avvicina a $0$
  (Scriveremo $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$)
- Se $x$ è molto negativo, $f(x)$ si avvicina a $0$.
  (Scriveremo che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$)
- Se $x$ è vicino a $0$, $f(x)$ si avvicina a $+\infty$
  ($\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$)
- Se $x$ è vicino a $2$, $f(x)$ si avvicina a $\frac{1}{4} = f(2)$
  ($\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{1}{4}$)

La definizione di limite che vedremo traduce in linguaggio matematico queste idee intuitive)

**Def**: Si definisce AMPLIAMENTO DI $\mathbb{R}$, l'insieme $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (su alcuni libri è indicato con $\bar{\mathbb{R}}$)

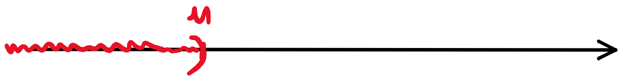
Per convenzione $\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty$.

**Def**: Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Si definisce INTORNO (SFERICO) di centro $x_0$ e raggio $r > 0$ l'insieme $(x_0 - r, x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$.
L'insieme di tutti gli intorni sferici di $x_0$ si indica con $\mathcal{I}_{x_0}$.




**Def**: Si definisce INTORNO DI $+\infty$ un qualsiasi insieme del tipo $(M, +\infty)$ con $M \in \mathbb{R}$


Si definisce INTORNO DI $-\infty$ un qualsiasi insieme del tipo $(-\infty, M)$ con $M \in \mathbb{R}$.



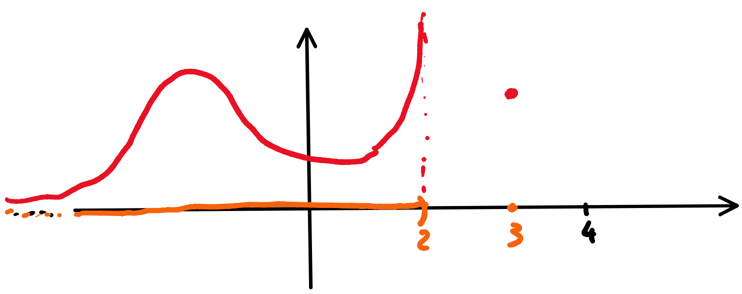

Indichiamo con $\mathcal{I}_{+\infty}$ e $\mathcal{I}_{-\infty}$ gli insiemi degli intorni di $-\infty$ e $+\infty$.

**OSS** $\forall x_0 \in \mathbb{R}^*$, $\mathcal{I}_{x_0}$ denota l'insieme degli intorni di $x_0$.

---

Non sempre, date $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, ha senso chiedersi cosa succede vicino a $x_0$.

Ad esempio, se $A = (-\infty, 2) \cup \{3\}$ e $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$




- Non ha senso chiedersi cosa succede per $x \to 3$.

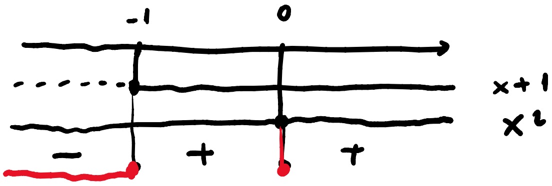
- Non ha senso chiedersi cosa succede per $x \to 4$

ESEMPIO

$$f(x) = \sqrt{x^2(-1-x)} = \sqrt{-x^2(1+x)}$$

$$-x^2(1+x) \geq 0$$

$$x^2(1+x) \leq 0$$

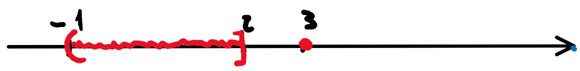



$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -1] \cup \{0\}$.

**Def**: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Si dice che $x_0$ è un PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER $A$ se ogni intorno di $x_0$ contiene infiniti punti di $A$.
L'insieme dei punti di accumulazione per $A$ si indica con $D(A)$.

ESEMPIO

$$A = (-1, 2] \cup \{3\}$$




$$D(A) = [-1, 2]$$

In generale, dato un intervallo

$A = (a, b)$ con $a < b$

$D(A) = [a, b]$.

Una proprietà simile vale per gli intervalli aperti

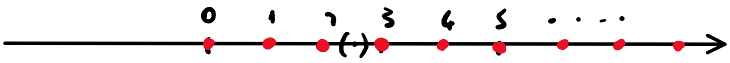
ESEMPIO

$$A = (2, +\infty)$$

$$D(A) = [2, +\infty] = [2, +\infty) \cup \{+\infty\}.$$

ESEMPIO

$A = \mathbb{N}$




$Dr(A) = \{+\infty\}$.

ESEMPIO

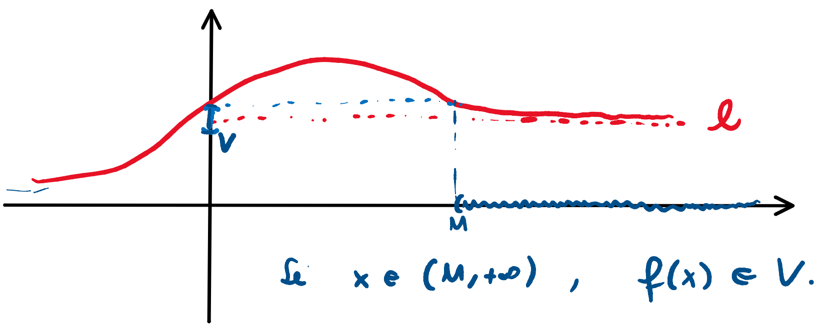
$Dr(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}^*$.

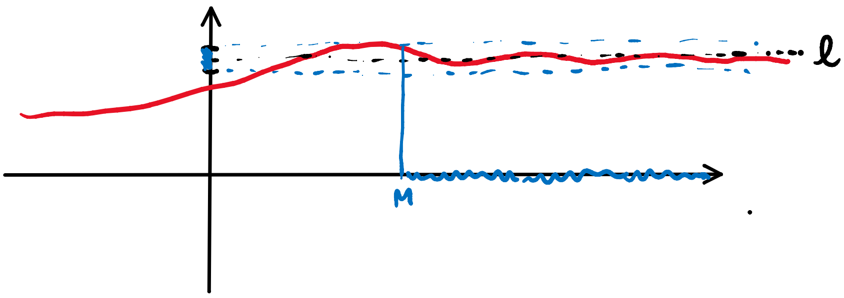
---

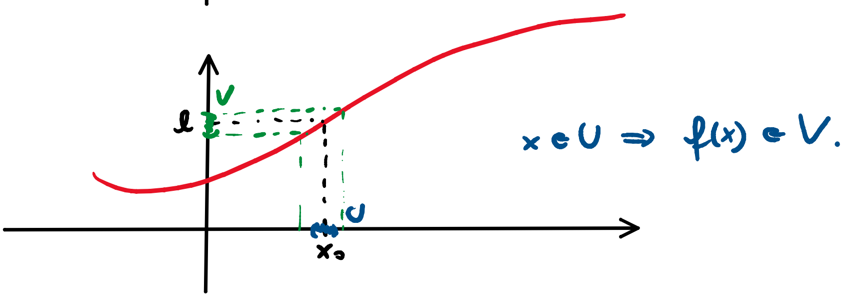
Idea della definizione di limite:

Diremo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ se $f(x)$ è vicino arbitrariamente ad $l$ purché $x$ sia sufficientemente vicino a $x_0$, cioè:

$\forall\, V$ intorno di $l$ si ha che $f(x) \in V$ purché $x$ sia in un intorno piccolo di $x_0$ (escluso eventualmente $x_0$)



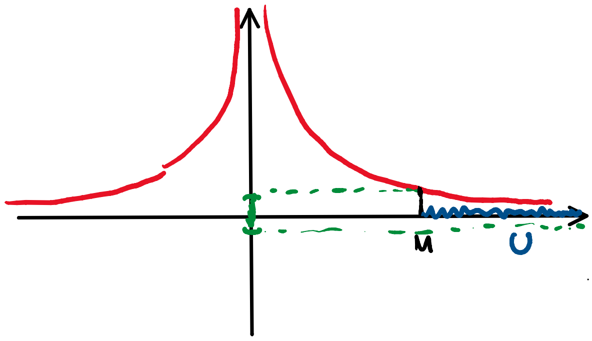
**Def**: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e siano $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in D_r(A)$ ( $x_0$ può essere anche $+\infty$ o $-\infty$). Sia $l \in \mathbb{R}^*$. Si dice che $l$ è è il LIMITE PER X CHE TENDE A $x_0$ DI $f(x)$ se:

$$\forall V \in \mathcal{D}_l \ \exists U \in \mathcal{D}_{x_0} \text{ t.c. } \forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\} : f(x) \in V.$$

( e scriveremo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ )

ESEMPIO

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$




- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Verifichiamo la definizione:

$\forall V \in \mathcal{D}_0 \ \exists U \in \mathcal{D}_{+\infty}$ t.c. $\forall x \in U \cap (\mathbb{R} \setminus \{0\})$
$f(x) \in V$.

Sia $V = (-\varepsilon, \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$. Allora possiamo prendere $U = \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, +\infty\right)$.

Se $x \in U = \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, +\infty\right) \Rightarrow x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \Rightarrow x^2 > \frac{1}{\varepsilon}$

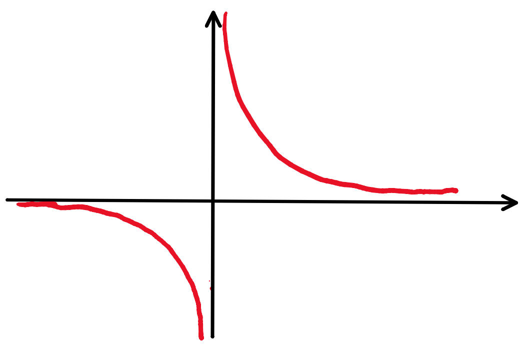
$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < \frac{1}{x^2} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{x^2} \in V.$$

ESEMPIO

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$D_r(A) = \mathbb{R}$



- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$
- $\lim_{x \to 0} f(x) = ?$ il comportamento di $f$ è diverso (per via del segno) alla destra o alla sinistra di $x_0 = 0$.

In questi casi $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$ però possiamo dare una definizione di limite destro e sinistro.

**Def:** Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^*$ si dice un **PUNTO DI ACCUMULAZIONE DA DESTRA** se ogni intorno di $x_0$ contiene infiniti punti di $A \cap (x_0, +\infty)$. L'insieme di questi punti si indica con $D^+(A)$.

Analogamente si definiscono i punti di acc. da sinistra:

**Def:** Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^*$ si dice un **PUNTO DI ACCUMULAZIONE DA SINISTRA** se ogni intorno di $x_0$ contiene infiniti punti di $A \cap (-\infty, x_0)$. L'insieme di questi punti si indica con $D^-(A)$.

**Def:** Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme e sono $f: A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D^+(A)$. Sia $\ell \in \mathbb{R}^*$. Si dice che $\ell$ è il **LIMITE DESTRO** di $f(x)$ per $x \to x_0$ se $\forall V \in \mathcal{I}_\ell \; \exists U \in \mathcal{I}_{x_0}$ t.c. $\forall x \in U \cap A \cap (x_0, +\infty)$ si ha $f(x) \in V$.

Analogamente:

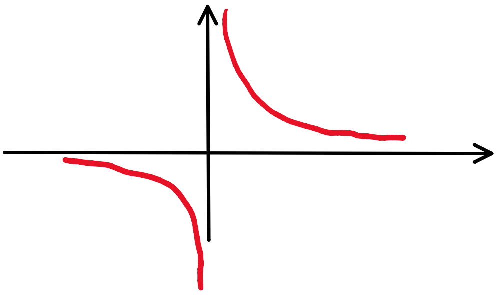
**Def**: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme e siano $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in D_r^-(A)$. Sia $\ell \in \mathbb{R}^*$. Si dice che $\ell$ è il LIMITE SINISTRO di $f(x)$ per $x \to x_0$ se $\forall V \in \mathcal{D}_\ell \ \exists U \in \mathcal{D}_{x_0}$ t.c. $\forall x \in U \cap A \cap (x_0, +\infty)$ si ha $f(x) \in V$.

( LIMITE DESTRO : $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$

LIMITE SINISTRO : $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ )

ESEMPIO:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

e $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

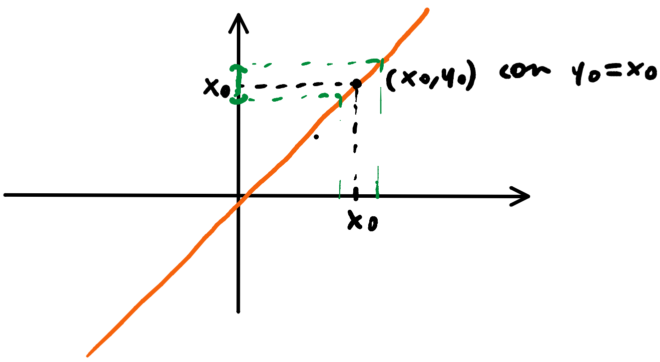
**TEOREMA** (Unicità del limite)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme e siano $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D_r(A)$ e $\ell \in \mathbb{R}^*$. Se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ allora $\ell$ è unico.

---

LIMITI DI (ALCUNE) FUNZIONI ELEMENTARI

1) $f(x) = x$



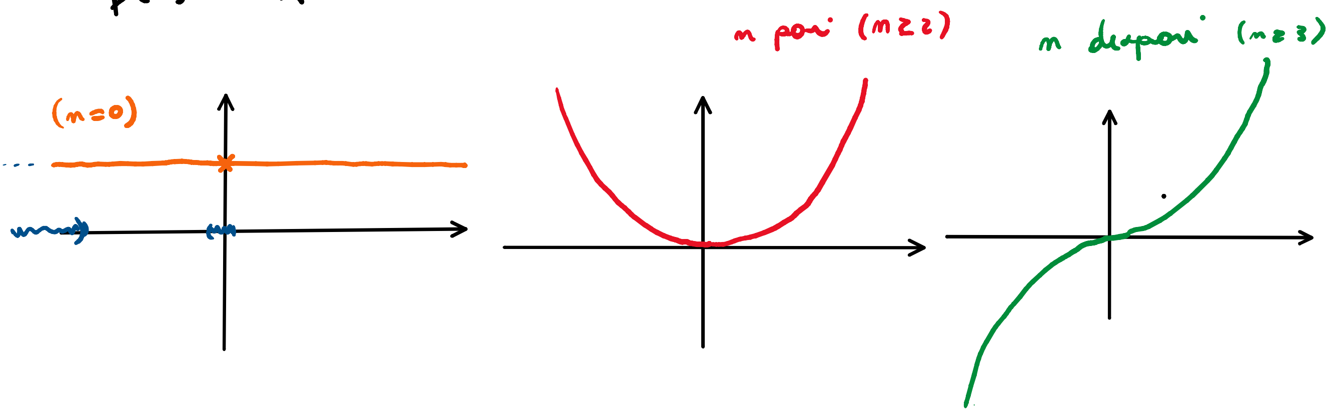

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0$$

## 2) Potenze naturali:

$$f(x) = x^n$$



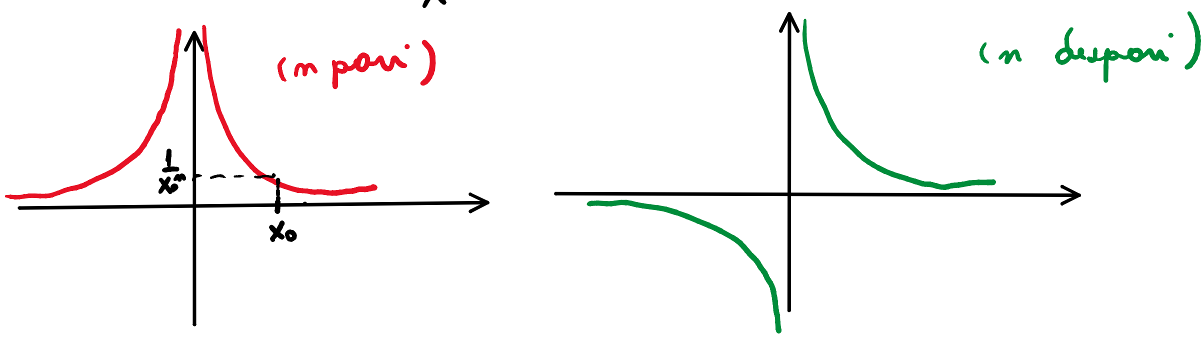

- $$\lim_{x \to +\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n > 0 \\ 1 & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

- $$\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n > 0 \text{ è pari} \\ -\infty & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 1 & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to x_0} x^n = \begin{cases} x_0^n & \forall\, x_0 \in \mathbb{R} \text{ se } n \neq 0 \\ 1 & \text{se } n = 0. \end{cases}$$

## 3) Potenze intere negative

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$




- $$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

- $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ è pari} \\ \nexists & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

Nel caso dispari: $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

- $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x_0^n} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

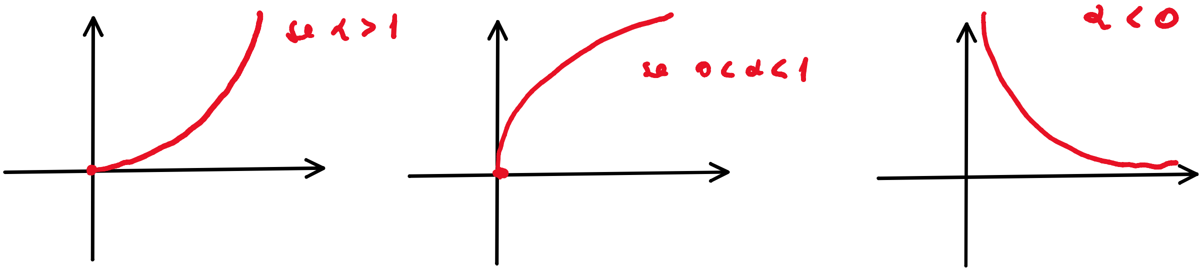
OSS

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$.

2) Se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ allora $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$.

c) Potenze reali:

$f(x) = x^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.




- $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$
- $\lim_{x \to 0} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$
- $\lim_{x \to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha \quad \forall x_0 \in ]0, +\infty[$.

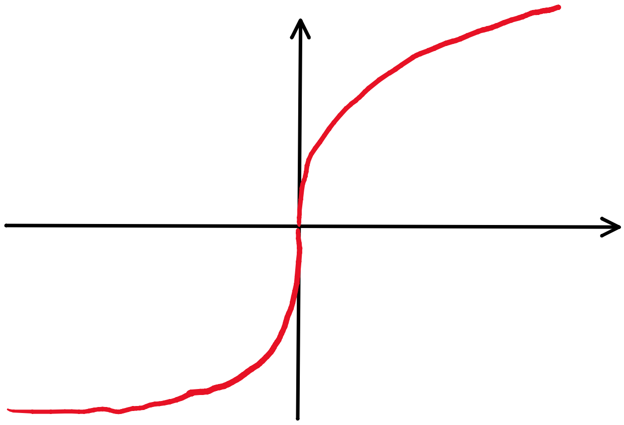
ESEMPI:

- $\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{3}} = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\pi} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-\pi} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{\pi}} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 4} x^{\sqrt{2}} = 4^{\sqrt{2}}$

ESEMPIO

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$



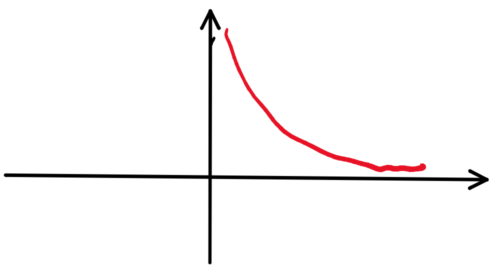
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

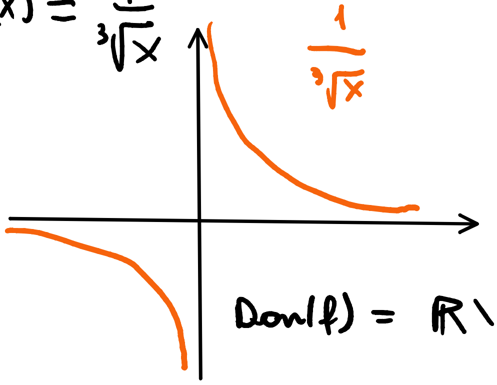
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \sqrt[3]{x_0} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

Ricordiamo che i grafici delle radici si possono disegnare a partire da quelli delle potenze sfruttando la simmetria.

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$



- $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$



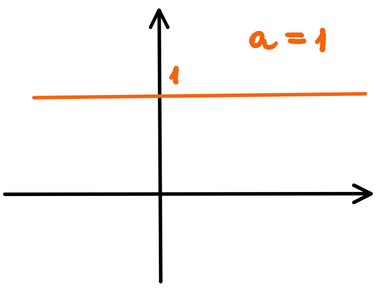

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

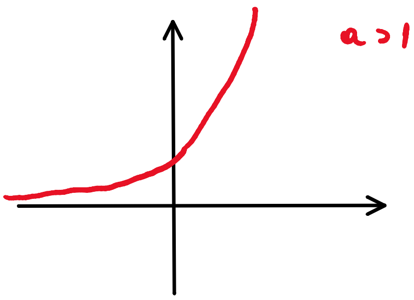
$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

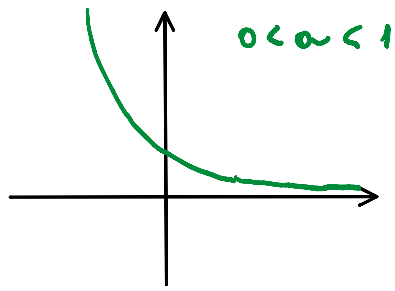

$\mathrm{Dom}(f) = (0, +\infty)$

## 5) Esponenziali

$f(x) = a^x$ con $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.



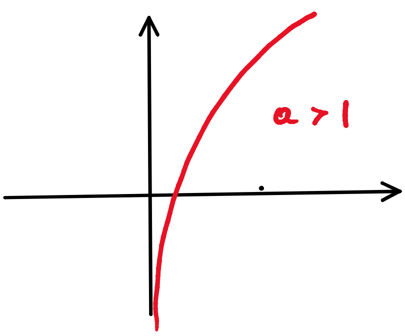



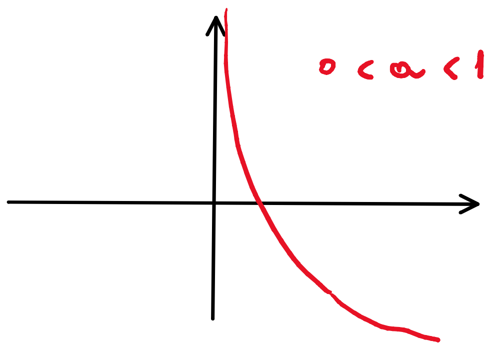

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 1 & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

## 6) Logaritmi

$f(x) = \log_a x$ con $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.




$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0 \qquad \forall\, x_0 \in (0, +\infty).$$