MATEMATICA - LEZIONE 17

mercoledì 30 ottobre 2024 09:05

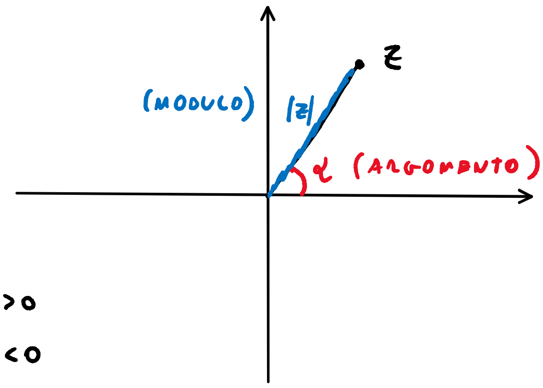
1) FORMA ALGEBRICA / CARTESIANA :

$z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$.

2) FORMA TRIGONOMETRICA (se $z \neq 0$)

$z = |z| (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$

dove



$$|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$$

$$\alpha = \arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0, y > 0 \\ \frac{3}{2}\pi & \text{se } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

3) FORMA ESPONENZIALE (se $z \neq 0$)

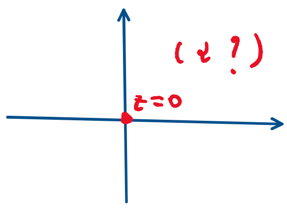
$z = |z| e^{i\alpha}$ con $\alpha = \arg(z)$

È equivalente alla forma trigonometrica.

Ricordare: $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$.

<u>OSS</u>

1) Se $z = 0$ l'argomento di z non è definito.



2) $z = 0 \iff |z| = 0$

quindi $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\quad 0 = |0| (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$

3) $\forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0$: $\arg(z)$ è definito a meno di multipli interi di 2π. In generale $\arg(z)$ indichiamo un qualsiasi angolo t.c. $z = |z| (\cos\alpha + i \sin\alpha)$.

Si definisce ARGOMENTO PRINCIPALE di z l'unico argomento nell'intervallo $[0, 2\pi)$. Si indica con $Arg(z)$.

4) Se $z = \underbrace{\rho (\cos\alpha + i \sin\alpha)}_{= \rho e^{i\alpha}}$ con $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

allora:

$$\begin{cases} \rho = |z| \\ \alpha = Arg(z) + 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

OSS 2

Se $z_1 = \rho_1 e^{i\alpha_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{i\alpha_2}$ allora:

- $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\alpha_1+\alpha_2)}$

Caso particolare: $z_1 = z_2 = \rho e^{i\alpha}$. In tal caso:

- $z^2 = \rho^2 e^{i2\alpha}$ $\quad \left(z^2 = \rho^2 (\cos(2\alpha) + i \operatorname{sen}(2\alpha)) \right)$
- $z^3 = \rho^3 e^{i3\alpha}$ $\quad \left(z^3 = \rho^3 (\cos(3\alpha) + i \operatorname{sen}(3\alpha)) \right)$
- $\forall n \in \mathbb{N}: \; z^n = \rho^n e^{in\alpha}$
- $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{|z|(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)}{|z|^2}$

$$= \frac{|z|(\cos\alpha - i \operatorname{sen}\alpha)}{|z|^2} = \frac{1}{|z|}(\cos(-\alpha) + i \operatorname{sen}(-\alpha))$$

$$= |z|^{-1}(\cos(-\alpha) + i \operatorname{sen}(-\alpha)) = |z|^{-1} e^{-i\alpha}.$$

FORMULA DI DE MOIVRE

$\forall z \in \mathbb{C}$, $z = \rho e^{i\alpha}$ con $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall n \in \mathbb{Z}$ si ha:

$$z^n = \rho^n e^{in\alpha} = \rho^n (\cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha))$$

ESEMPI

1) Calcoliamo $(\sqrt{3} + i)^{-8}$.

Sia $z = \sqrt{3} + i$. Scriviamo z in forma esponenziale

- $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$
- Argomento: $\cos\alpha = \dfrac{Re(z)}{|z|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{Im(z)}{|z|} = \dfrac{1}{2}$

$\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ $\quad (+2k\pi)$

$\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{6}$ Quindi $z = 2e^{i\cdot\frac{\pi}{6}}$

Quindi:

$$(\sqrt{3}+i)^{-8} = z^{-8} = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{-8} = 2^{-8}e^{-i\frac{4}{3}\pi}$$

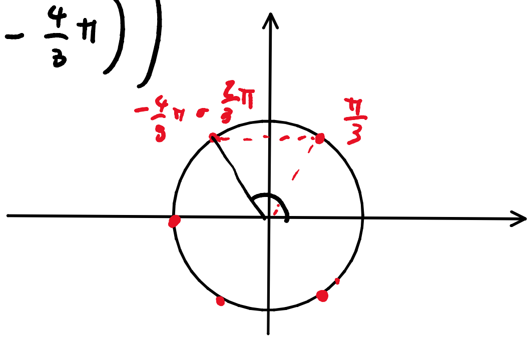
$\frac{\pi}{6}\cdot(-8) = -\frac{4}{3}\pi$

$$= 2^{-8}\left(\cos\left(-\frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{4}{3}\pi\right)\right)$$

$$= 2^{-8}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2^9} + i\frac{\sqrt{3}}{2^9}$$

$$= -\frac{1}{512} + i\frac{\sqrt{3}}{512}.$$

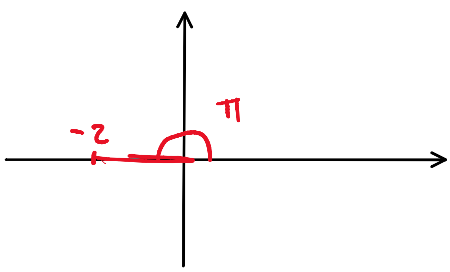


Nota:

$z = -2$ $|-2| = 2$ $\rho = 2$

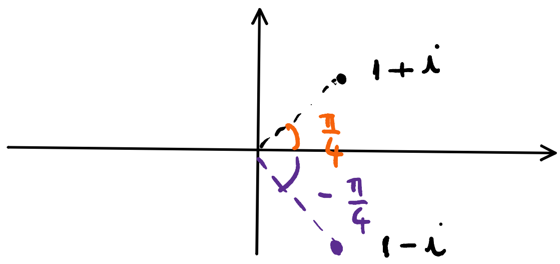
Argomento: $\varphi = \pi$

$-2 = 2e^{i\pi}$



---

2) Calcolare $\frac{(1+i)^6}{(1-i)^{10}}$.



Numeratore $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ $\text{Re}(1+i)=1$, $\text{Im}(1+i)=1$

$\text{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}$

$1+i = \sqrt{2}e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$

Denominatore: $1-i = \sqrt{2}e^{-i\cdot\frac{\pi}{4}}$ $|1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

$\arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$

Quindi:

$$\frac{(1+i)^6}{(1-i)^{10}} = \frac{\left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^6}{\left(\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{10}} = \frac{1}{(\sqrt{2})^4}\, \frac{e^{i\frac{3}{2}\pi}}{e^{-i\frac{5}{2}\pi}}$$

$$= \frac{1}{4}\, \frac{\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right)}{\left(\cos\left(-\frac{5}{2}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{5}{2}\pi\right)\right)}$$

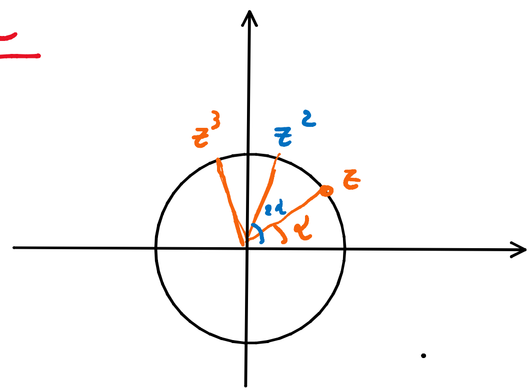
$$= \frac{1}{4}\, \frac{-i}{-i} = +\frac{1}{4}$$

Interpretazione grafica delle potenze

Se $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$. Allora:

$$|z^n| = |z|^n = 1^n = 1$$

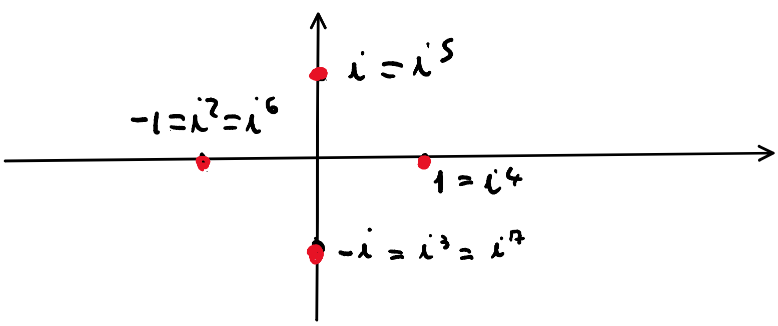
$$\arg(z^n) = n \arg(z).$$



Se $|z| \neq 1$, oltre a ruotare cambia la distanza dall'origine.

Potenze di i:

i, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$ ....



Radici n-esime di un numero complesso

Def: Sia $z \in \mathbb{C}$. Una RADICE n-ESIMA ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) è un numero complesso $w \in \mathbb{C}$ tale che $w^n = z$.

Quante sono le radici n-sime e come si trovano?

- Caso banale $z = 0$:

$$w^n = 0 \iff w = 0 \quad (\text{unica radice } n\text{-sima})$$

- Se $z \neq 0$:

$$z = |z| e^{i \operatorname{Arg}(z)}$$

$$w = \rho e^{i\vartheta}$$

Quindi $w^n = z \iff \rho^n e^{in\vartheta} = |z| e^{i \operatorname{Arg}(z)}$

$$\iff \begin{cases} \rho^n = |z| \\ n\vartheta = \operatorname{Arg}(z) + 2k\pi \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \rho = |z|^{\frac{1}{n}} \quad (\sqrt[n]{|z|}) \\ \vartheta = \dfrac{\operatorname{Arg}(z)}{n} + \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff \begin{cases} \rho = |z|^{\frac{1}{n}} \\ \vartheta = \dfrac{\operatorname{Arg}(z)}{n} + \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Ricordare:

Se $z \neq 0$, ci sono esattamente n radici n-sime di z che sono i numeri del tipo:

$$\sqrt[n]{|z|}\, e^{i\left(\frac{\operatorname{Arg}(z)}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

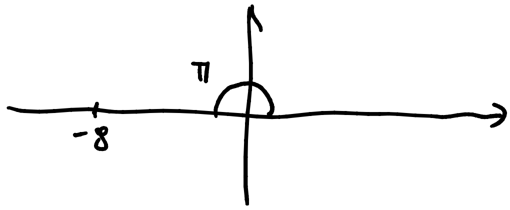
ESEMPIO

Calcoliamo le radici cubiche ($n=3$) di -8.

Si rappresenta -8 in forma esponenziale:

$|-8| = 8$

$\arg(-8) = \pi$



Quindi $-8 = 8\,e^{i\pi}$

Le radici cubiche di -8 sono i numeri del tipo:

$\sqrt[3]{8}\;e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$ con $k = 0, 1, 2$

$k=0$: $\quad 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1+i\sqrt{3}$

$k=1$: $\quad 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi\right)} = 2\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -2$

$k=2$: $\quad 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{4}{3}\pi\right)} = 2\left(\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)\right)$

$= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$= 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}.$

Conclusione: le radici cubiche sono

$1 - i\sqrt{3}\quad , \quad -2 \quad , \quad 1+i\sqrt{3}.$

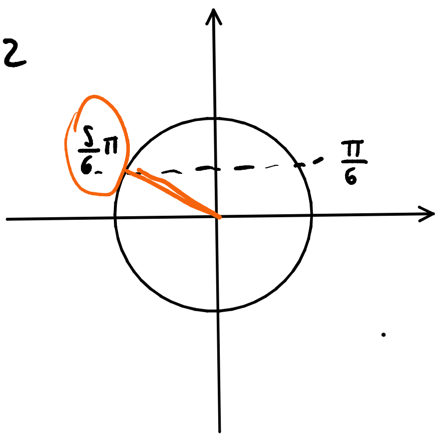
<u>ESEMPIO</u> :

Determinare le radici quinte di $z = -\sqrt{3}+i$. scrivendole in forma esponenziale.

—

. $|-\sqrt{3}+i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$

. argomento ?



$\cos(\alpha) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}$

$\alpha = \frac{5}{6}\pi$

$-\sqrt{3}+i = 2\,e^{i\frac{5}{6}\pi}$

Le radici quinte sono:

$\sqrt[5]{2}\;e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{5}\right)}$ $\qquad k = 0, 1, 2, 3, 4$

$k=0: \quad \sqrt[5]{2}\, e^{i\frac{\pi}{6}}$

$k=1: \quad \sqrt[5]{2}\, e^{i\frac{17}{30}\pi}$

$k=2: \quad \sqrt[5]{2}\, e^{i\frac{29}{30}\pi}$

$k=3: \quad \sqrt[5]{2}\, e^{i\frac{41}{30}\pi}$

$k=4: \quad \sqrt[5]{2}\, e^{i\frac{53}{30}\pi}$

Caso particolare: radici quadrate

Data $z \in \mathbb{C}$, le radici quadrate di z sono

$$\sqrt{|z|}\, e^{i\left(\frac{\arg(z)}{2} + k\pi\right)} \qquad \text{con} \quad k = 0, 1.$$

$$= \sqrt{|z|}\, e^{i\frac{\arg z}{2}}\, e^{ik\pi}$$

$$e^{ik\pi} \begin{cases} e^{0} = 1 & \text{se } k=0 \\ e^{i\pi} = -1 & \text{se } k=1 \end{cases}$$

Le radici quadrate sono $\pm\sqrt{|z|}\, e^{i\frac{\arg z}{2}}$

ESEMPIO

$z = 3+4i$

$|z| = \sqrt{9+16} = 5$

$\alpha = \arctan \frac{4}{3}$

$z = 5\, e^{i \arctan\frac{4}{3}}$

Le radici quadrate sono $z = \pm\sqrt{5}\, e^{i\frac{\arctan\frac{4}{3}}{2}}$

Nota: questo risultato in realtà si può scrivere in maniera più semplice:

Nota: Per le formule di bisezione:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

Se $\frac{\alpha}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ cioè $\alpha \in [0,\pi]$, le radici quadrate di $z = |z| e^{i\alpha}$ sono $\pm\sqrt{|z|}\, e^{i\frac{\alpha}{2}} = \pm\sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$

Ma:

$$\sqrt{z}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right) = |z|^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\right)$$

$$= \left(\sqrt{\frac{|z|+|z|\cos\alpha}{2}} + i\sqrt{\frac{|z|-|z|\cos\alpha}{2}}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{|z|+\operatorname{Re}(z)}{2}} + i\sqrt{\frac{|z|-\operatorname{Re}(z)}{2}}$$

Formula alternativa per le radici quadrate.

Se $z = x + iy$ con $y \geq 0$.

allora le radici quadrate di z sono

$$\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}\right)$$

Se $y < 0$:

$$\pm\left(-\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}\right)$$

ESEMPIO

$z = 3 + 4i$

Calcoliamo le radici quadrate:

$$\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{9+16}+3}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{9+16}-3}{2}}\right) = \pm(2+i)$$

Equazioni di secondo grado in $\mathbb{C}$:

Se abbiamo un'eq: $a z^2 + b z + c = 0$
con $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Poniamo $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$.

Le soluzioni sono: $\dfrac{-b \pm r}{2a}$ dove r è una radice quadrata di Δ.

- $\Delta = 0$: una soluzione: $-\dfrac{b}{2a}$ $(r = 0)$
- $\Delta \neq 0$: due soluzioni.