MATEMATICA - LEZIONE 16

lunedì 28 ottobre 2024 09:06

Def: Un NUMERO COMPLESSO è un numero della forma $x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$.

Simbolo

$\mathbb{C} := \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. (INSIEME DEI NUMERI COMPLESSI)

Operazioni con i numeri complessi:

Def Dati $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ con $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Possiamo definire:

- $z_1 + z_2 := x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$
- $z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

ESEMPI

$$(2 + i) \cdot (1 + i) = 2 + 2i + i + i^2$$
$$= 2 + 3i - 1 = 1 + 3i$$

Def: La rappresentazione $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ si dice RAPPRESENTAZIONE (O FORMA) ALGEBRICA (o CARTESIANA) di z.

- x si dice PARTE REALE ($Re(z)$)
- y si dice PARTE IMMAGINARIA ($Im(z)$)

Spesso si lavora con numeri complessi che non sono scritti direttamente in forma cartesiana.

ESEMPI

- i^7 (non è in forma cartesiana)

$$i^7 = i^6 \cdot i = (i^2)^3 \cdot i = (-1)^3 \cdot i = \underline{-i}$$

$$= 0 - i \qquad \text{(FORMA CARTESIANA)}$$

Quindi $Re(i^7) = 0$ e $Im(i^7) = -1$.

- $(1+2i)^2$ non è in forma cartesiana

$$(1+2i)^2 = 1 + 4i^2 + 4i$$

$$= 1 - 4 + 4i = -3 + 4i \qquad \text{(FORMA CARTESIANA)}$$

OSS 1

- Per le operazioni in $\mathbb{C}$ valgono le stesse regole che abbiamo visto per $\mathbb{R}$. In particolare:

1) Vale la legge di annullamento del prodotto ($z_1 \cdot z_2 = 0 \iff z_1 = 0 \vee z_2 = 0$).

2) $\forall z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ si ha che $-z = -x - iy$ ($Re(-z) = -x$, $Im(-z) = -y$).

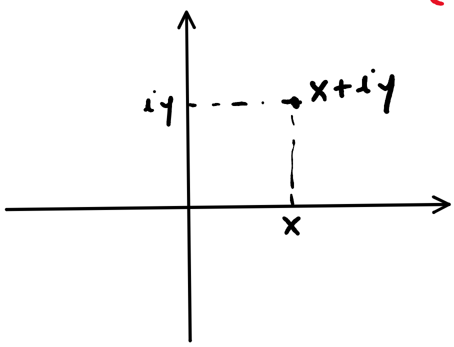
3) Dato $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\exists$ un numero complesso $\frac{1}{z}$ tale che $z \cdot \frac{1}{z} = 1$.

Domanda: Quali sono la parte reale e la parte immaginaria di $\frac{1}{z}$?
(cioè, come si scrive $\frac{1}{z}$ in forma cartesiana?)

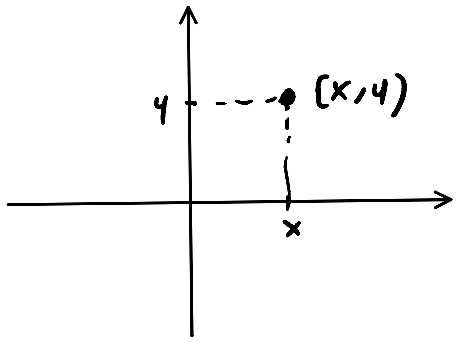
Per rispondere ci servono prima alcune definizioni

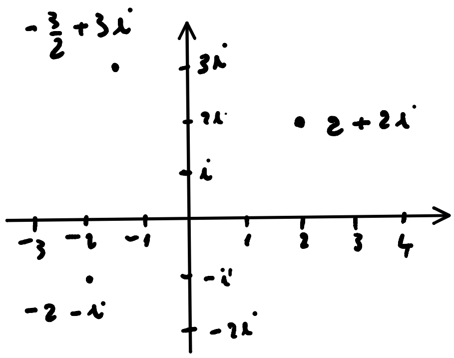
OSS 2 I numeri complessi si possono rappresentare su un piano (PIANO COMPLESSO) identificando $z = x + iy \in \mathbb{C}$ con la coppia $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

PIANO COMPLESSO ($\mathbb{C}$)



PIANO CARTESIANO ($\mathbb{R}^2$)





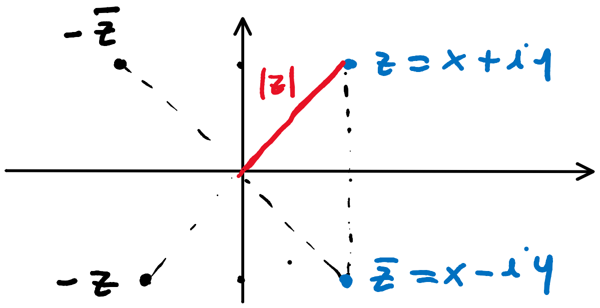
Def: Sia $z \in \mathbb{C}$ definiamo MODULO di z la quantità

$$|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$$

(cioè se $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, allora $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$).
$|z|$ rappresenta la distanza di z da 0.

Def Sia $z = x + iy \in \mathbb{C}$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Definiamo CONIUGATO di z, il numero $\bar{z} := x - iy$

$(\bar{z} = Re(z) - i\, Im(z))$



$$\overline{2+i} = 2 - i$$

$$\overline{-5+6i} = -5 - 6i$$

$$\overline{6 - 2i} = 6 + 2i$$

$$\overline{3i} = -3i$$

$$\overline{10} = 10$$

OSS

- Se $z \in \mathbb{R}$ allora $\bar{z} = z$
- Più precisamente: $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$.
- Se $z \in \mathbb{R}$:

$$\underbrace{|z|}_{\text{MODULO}} = \sqrt{Re(z)^2 + \underbrace{Im(z)^2}_{=0}} = \sqrt{Re(z)^2} = \underbrace{|Re(z)|}_{\text{VALORE ASSOLUTO}}$$

> Ricordare
>
> $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, con $n \geq 2$:
>
> - Se n è pari $\sqrt[n]{x^n} = |x|$
> - Se n è dispari: $\sqrt[n]{x^n} = x$.

PROPRIETÀ

$\forall\, z \in \mathbb{C}$: $\quad z \cdot \bar{z} = |z|^2$

Infatti: $z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2$

$$= x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$

Conseguenze da ricordare:

$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{\in \mathbb{R}} - i \underbrace{\frac{y}{x^2+y^2}}_{\in \mathbb{R}}$$

Quindi:

$$Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{Re(z)}{|z|^2}$$

$$Im\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{-Im(z)}{|z|^2}$$

Più in generale, quando abbiamo un numero che è scritto come rapporto tra due numeri complessi, possiamo portarlo in forma algebrica moltiplicando e dividendo per il coniugato del denominatore.

ESERCIZIO

Scrivere in forma algebrica il numero complesso

$$z = \frac{2+i}{4+3i}$$

$$z = \frac{2+i}{4+3i} = \frac{2+i}{4+3i} \cdot \frac{(4-3i)}{4-3i}$$

$$= \frac{(2+i)\cdot(4-3i)}{16 - (3i)^2}$$

$$= \frac{8 - 6i + 4i - 3i^2}{16 + 9} = \frac{8 - 2i + 3}{25}$$

$$= \frac{11 - 2i}{25} = \frac{11}{25} - \frac{2}{25} i .$$

Cioè:

$$Re(z) = \frac{11}{25}, \quad Im(z) = -\frac{2}{25}$$

ESERCIZIO

Determinare la parte reale e la parte immaginaria di: $z = \frac{i-1}{2-i}$

Moltiplichiamo e dividiamo per $2+i$:

$$\frac{i-1}{2-i} = \frac{i-1}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{(i-1)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2i + i^2 - 2 - i}{4 - i^2}$$

$$= \frac{2i - 1 - 2 - i}{5} = \frac{-3+i}{5} = -\frac{3}{5} + \frac{1}{5} i$$

$Re(z) = -\frac{3}{5}$ $\qquad Im(z) = \frac{1}{5}$

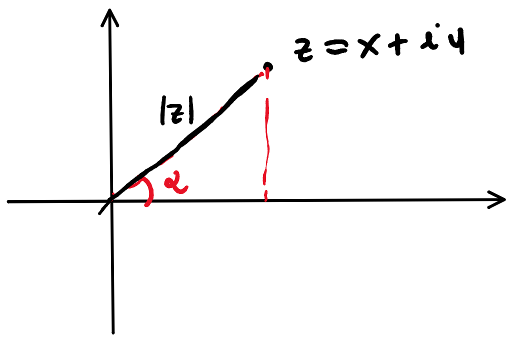
ESERCIZIO

$z = 4+i$. Calcolare $\frac{1}{z}$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{4+i} = \frac{4-i}{(4+i)(4-i)} = \frac{4-i}{16-i^2} = \frac{4-i}{17} = \frac{4}{17} - \frac{i}{17}$$

Esistono altre rappresentazioni di un numero complesso.

- FORMA TRIGONOMETRICA (o FORMA POLARE)



$x = |z| \cos\alpha$

$y = |z| \operatorname{sen}\alpha$

Quindi z si può scrivere nella forma

$$z = |z| \cos\alpha + i\, |z| \operatorname{sen}\alpha$$
$$= |z| (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$$

Questo modo di scrivere z si dice FORMA TRIGONOMETRICA di z.

OSS: Se $z_1 = |z_1|(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$ e $z_2 = |z_2|(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$ allora:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$$

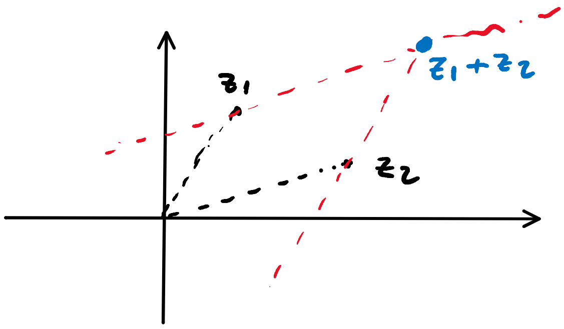
$$= |z_1||z_2|(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2 + i\cos\alpha_1\sin\alpha_2 + i\sin\alpha_1\cos\alpha_2)$$

$$= |z_1||z_2|(\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i\sin(\alpha_1+\alpha_2))$$

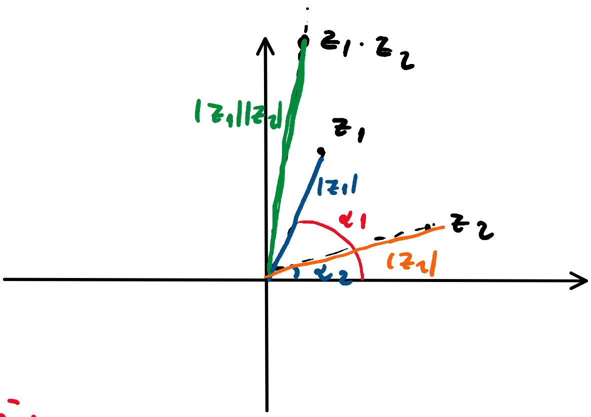
Quindi $|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|$ e $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.

Interpretazione grafica delle operazioni:

Addizione:



Moltiplicazione



RIEPILOGO DI ALCUNE PROPRIETÀ:

1) $Re(z_1+z_2) = Re(z_1) + R(z_2)$
2) $Re(z_1 \cdot z_2) = Re(z_1)R(z_2) - Im(z_1)In(z_2)$.

e

$Im(z_1 \cdot z_2) = Re(z_1)Im(z_2) + Im(z_1)Re(z_2)$.

3) $|z| \in \mathbb{R}$ e $|z| \geq 0$.
4) $|z| = 0 \iff z = 0$
5) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
6) $|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
7) $|Re(z)| \leq |z|$ e $|Im(z)| \leq |z|$
8) $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.

Domande:

Come si passa dalla rappresentazione algebrica a quella trigonometrica e viceversa?

- Se $z = |z| (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$. Allora

$$= |z| \cos \alpha + i\, |z| \operatorname{sen} \alpha$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = |z| \cos \alpha \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(z) = |z| \operatorname{sen} \alpha .$$

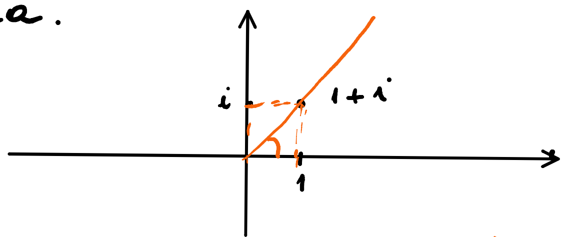
- Se $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Allora

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0 \text{ e } y > 0 \\ \frac{3}{2}\pi \ \left(o -\frac{\pi}{2}\right) & \text{se } x = 0 \text{ e } y < 0 \end{cases}$$

ESEMPIO

$z = 1 + i$. Proviamo a scriverla in forma trigonometrica.



$$\arg(z) = \frac{\pi}{4}$$

$$\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \right)$$

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Quindi:

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

Nota:

$$\cos(\arg(z)) = \frac{Re(z)}{|z|} \quad e \quad \text{sen}(\arg(z)) = \frac{Im(z)}{|z|}$$

Se questi due valori sono il cos e il sin di un angolo noto, non serve usare la formula.

ESEMPI

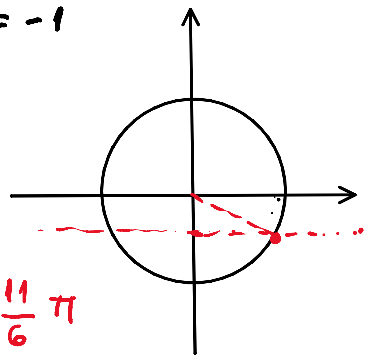
1) $z = \sqrt{3} - i$ $\qquad Re(z) = \sqrt{3}$, $Im(z) = -1$

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$z = \sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$$

$\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}$

$\alpha = -\frac{\pi}{6}$ o $\alpha = \frac{11}{6}\pi$



$$\arg(z) = \frac{11}{6}\pi$$

Forma trigonometrica:

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{11}{6}\pi\right)\right)$$

2) $z = 2 + i$

$|z| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ e $z = \sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{i}{\sqrt{5}}\right)$

$\frac{2}{\sqrt{5}}$ $\frac{1}{\sqrt{5}}$ non sono il seno e il coseno di un angolo noto. In questo caso, usiamo la formula con arctan.

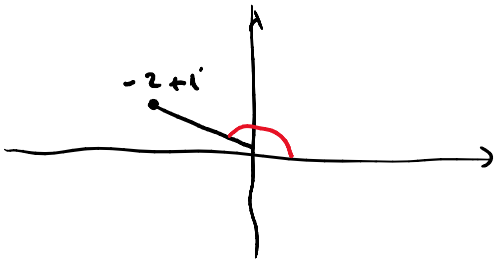
$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

Forma trigonometrica:

$$z = \sqrt{5}\left(\cos\left(\arctan\frac{1}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\arctan\frac{1}{2}\right)\right).$$

3) $z = -2 + i$

$|z| = \sqrt{5}$



$$\arg(z) = \pi + \arctan\left(\frac{1}{-2}\right)$$
$$= \pi - \arctan\left(\frac{1}{2}\right).$$

$$z = \sqrt{5}\left(\cos\left(\pi - \arctan\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\pi - \arctan\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)\right)$$

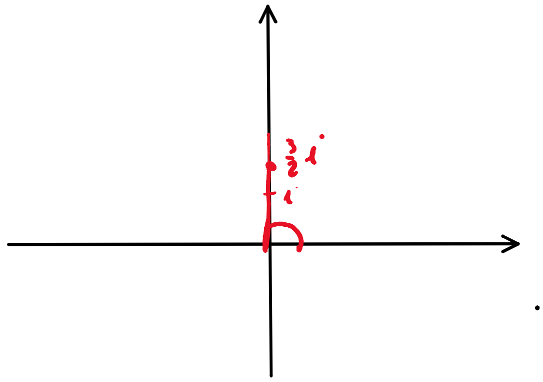
---

4) $z = \frac{3}{2} i$

$Re(z) = 0 \qquad Im(z) = \frac{3}{2}$

$|z| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}$

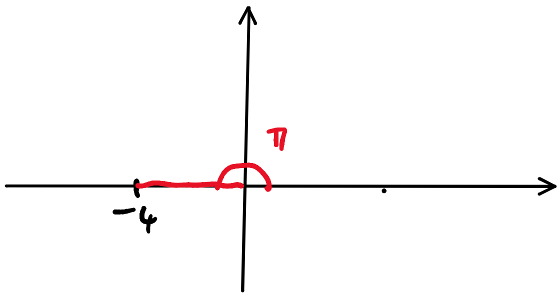
$\arg(z) = \frac{\pi}{2}$



5) $z = -4$

$|z| = 4$

$\arg(z) = \pi.$



Sia $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sia $\alpha = \arg(z)$.

Def: Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, definiamo
$$e^{i\alpha} := \cos\alpha + i \sin\alpha.$$

Allora $\forall z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, si ha che $z = |z| e^{i \arg(z)}$.
Questa scrittura di z si dice FORMA ESPONENZIALE di z.

ESEMPI

1) $z = 1 + i$.

$|z| = \sqrt{2}$, $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$

Possiamo scrivere $z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ (FORMA ESPONENZIALE)

2) $z = \frac{3}{2} i$

$|z| = \frac{3}{2}$ e $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$

quindi $\frac{3}{2} i = \frac{3}{2} e^{i\frac{\pi}{2}}$

3) $z = -4$

$|z| = 4$ e $\arg(z) = \pi$

Quindi $-4 = 4 e^{i\pi}$.

4) $z = 2 + i$

$|z| = \sqrt{5}$, $\arg(z) = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$

$z = \sqrt{5}\, e^{i \arctan\left(\frac{1}{2}\right)}$.

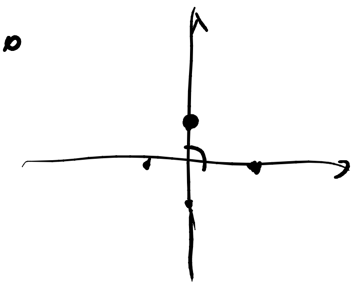
La forma esponenziale aiuta a calcolare facilmente le potenze.

Idea :

$$(1+i)^{10} = \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{10} = \left(\sqrt{2}\right)^{10} \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{10}$$

$$= 32 \cdot e^{i\frac{5}{2}\pi}$$

$$= 32\, i$$



Abbiamo usato: $\cos\left(\frac{5}{2}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{5}{2}\pi\right) = 0 + i \cdot 1 = i$.