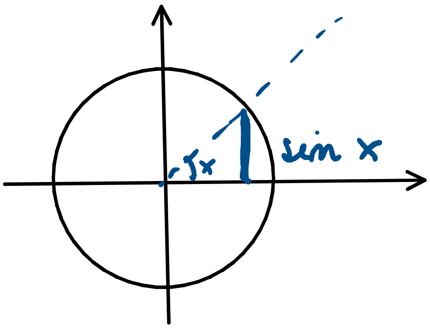
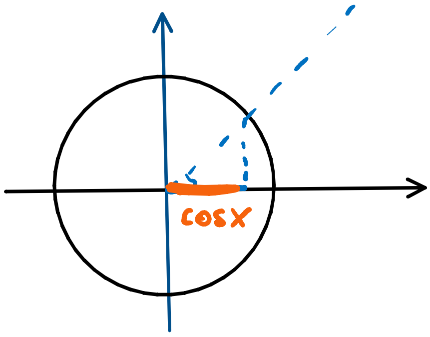
MATEMATICA - LEZIONE 15

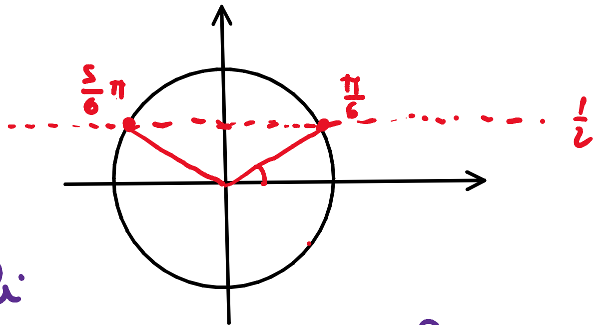
venerdì 25 ottobre 2024 11:04





ESERCIZIO

Risolvere $\sin x = \frac{1}{2}$

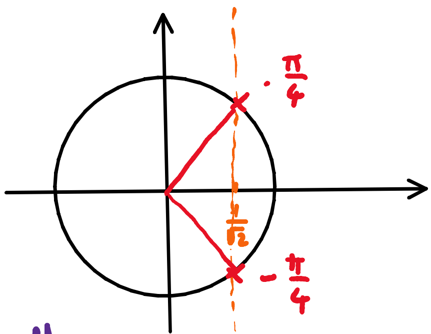


Tracciamo una retta verticale ad altezza $\frac{1}{2}$ e vediamo quali inquali punti questa interseca la circonferenza goniometrica. Gli angoli che corrispondono a questi punti sono le soluzioni.

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

ESERCIZIO

$$\cos(3x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



Stesso procedimento di prima ma con una retta verticale.

$$3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \vee \quad 3x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

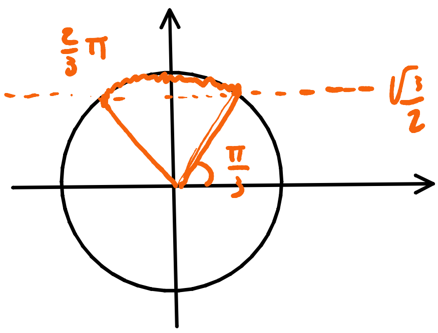
$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$$

ESERCIZIO

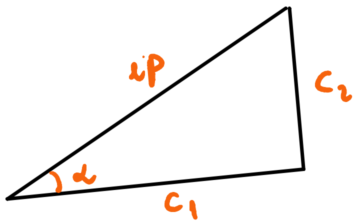
$$\sin(6x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 6x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}.$$



Abbiamo detto che in un triangolo rettangolo



$c_1 = ip \cdot \cos\alpha$

$c_2 = ip \cdot \sin\alpha$

Di conseguenza, il rapporto tra i cateti è

$\frac{c_2}{c_1} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ TANGENTE DI α o $\frac{c_1}{c_2} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ COTANGENTE

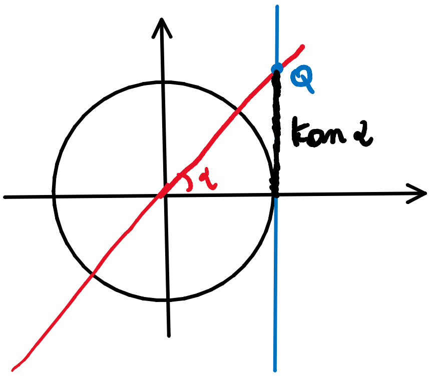
Indicata con $\tan\alpha$ o $tg\,\alpha$

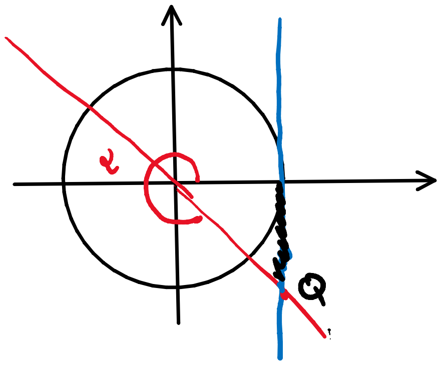
Indicata con $\cot\alpha$ o $cotg\,\alpha$

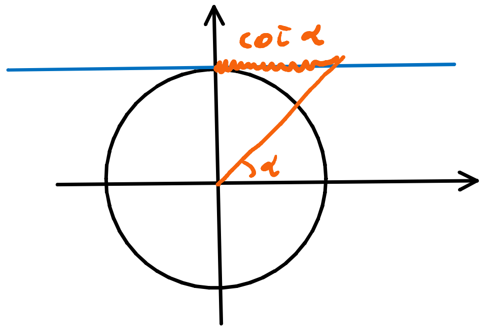
Interpretazione sulla circonferenza goniometrica

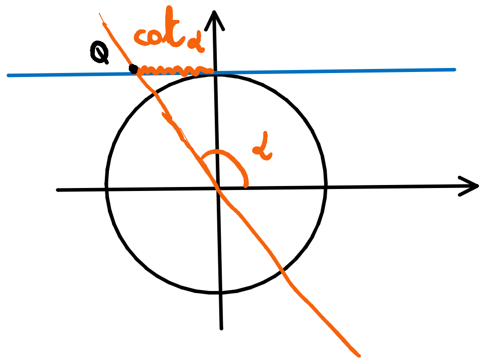
Tangente: è l'ordinata del punto Q ottenuto intersecando la retta individuata da α con la retta tangente alla circonferenza in $(1,0)$.

Cotangente: è l'ascissa del punto Q ottenuto intersecando la retta individuata da α con la retta tangente alla circonferenza in $(0,1)$.









$\frac{\sin x}{\cos x}$ $\qquad$ $\frac{\cos x}{\sin x}$

$\parallel$ $\qquad$ $\parallel$

α	$\cos x$	$\sin x$	$\tan x$	$\cot x$	
0	1	0	0	n.d	(non definita)
$\frac{\pi}{2}$	0	1	n.d	0	
π	-1	0	0	n.d.	
$\frac{3}{2}\pi$	0	-1	n.d	0	
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	
$\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	-1	
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	

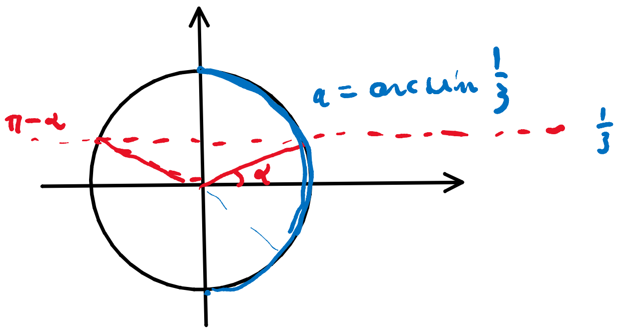
Attenzione alle frazioni:

- $$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

- $$\frac{1}{1-\sqrt{2}} = \frac{1}{1-\sqrt{2}} \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{1^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{1+\sqrt{2}}{-1} = -1-\sqrt{2}$$

ESERCIZIO

$\sin x = \frac{1}{3}$?



Def: Sia $x \in \mathbb{R}$, $-1 \le x \le 1$. Definiamo ARCOSENO DI x l'unico angolo nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ il cui seno è x. (Si indica con $\arcsin x$)

$$\sin x = \frac{1}{3} \iff x = \arcsin\frac{1}{3} + 2k\pi \;\vee\; x = \pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2k\pi$$

Ricordare

Se $c \in [-1,1]$ allora

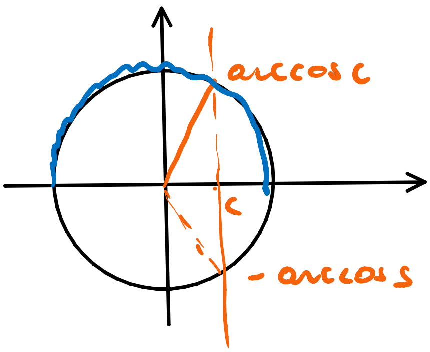
$$\sin x = c \iff x = \arcsin c + 2k\pi \;\vee\; x = \pi - \arcsin c + 2k\pi$$

- $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

Def: Sia $c \in [-1,1]$. Si definisce ARCOCOSENO di c l'unico angolo in $[0,\pi]$ il cui coseno è c. (Si indica con $\arccos x$)

Ricordare: Se $c \in [-1,1]$

$$\cos x = c \iff x = \arccos c + 2k\pi \quad \vee \quad x = -\arccos c + 2k\pi.$$



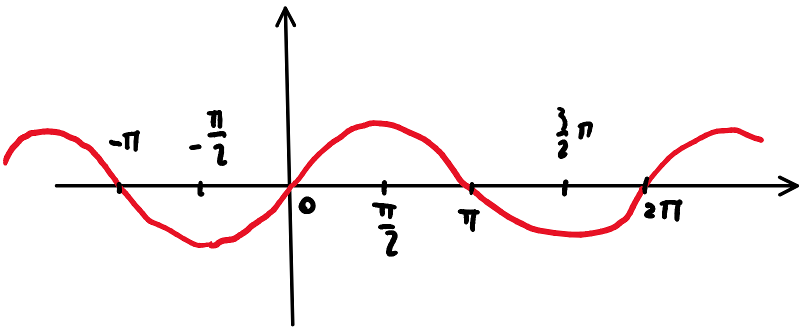
Funzione SENO

$f(x) = \sin x$

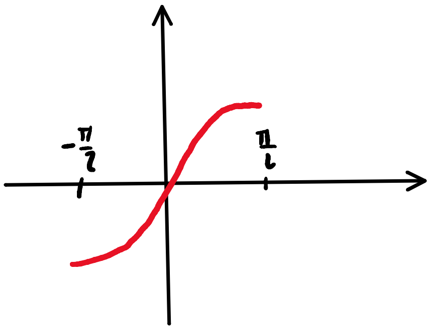
$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$f(\mathbb{R}) = [-1,1]$

f è dispari.



La funzione
$$g: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1], \qquad x \longmapsto \sin x$$



è biettiva e la sua inversa è
$$g^{-1}: [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \qquad x \longmapsto \arcsin x$$

Funzione ARCOSENO

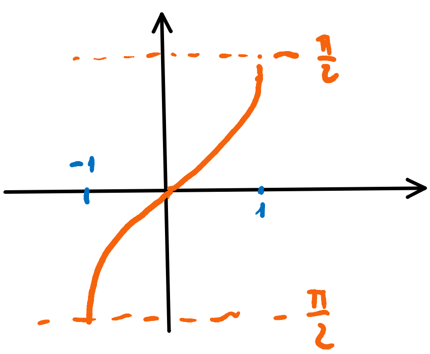
$f(x) = \arcsin x$

$\mathrm{Dom}(f) = [-1,1]$

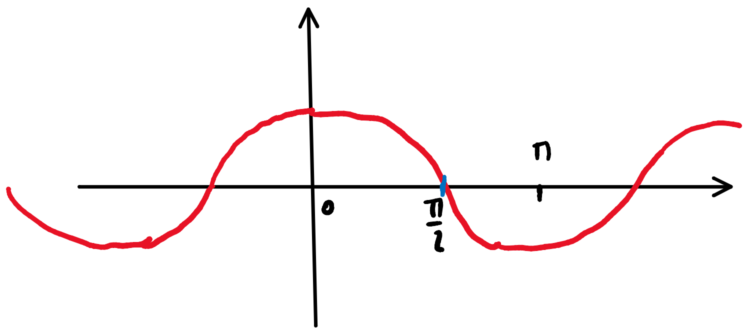
$f([-1,1]) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

f è strett. crescente

f è dispari.



Funzione COSENO

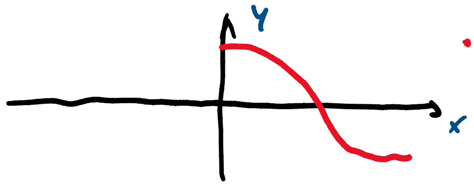


$f(x) = \cos x$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$

f è pari.



$$g : \begin{array}{ccc} [0, \pi] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longrightarrow & \cos x \end{array}$$

è invertibile e la sua inversa è

$$g^{-1} : \begin{array}{ccc} [-1, 1] & \longrightarrow & [0, \pi] \\ x & \longmapsto & \arccos x \end{array}$$

Funzione ARCOCOSENO

$f(x) = \arccos x$

$\mathrm{Dom}(f) = [-1, 1]$

$f([-1, 1]) = [0, \pi]$

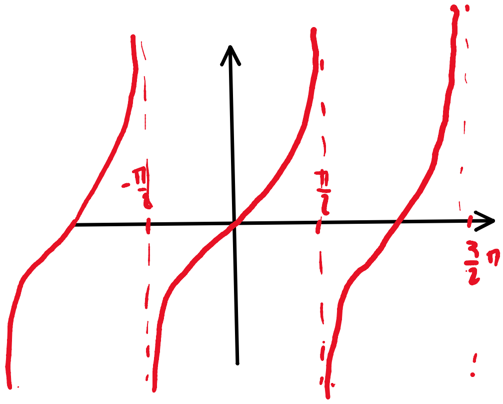
f è strett. decrescente.

TANGENTE:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$

$f(\mathrm{Dom}(f)) = \mathbb{R}$



$g: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \tan x$

è invertibile e la sua inversa è detta funzione ARCOTANGENTE.

FUNZIONE ARCOTANGENTE

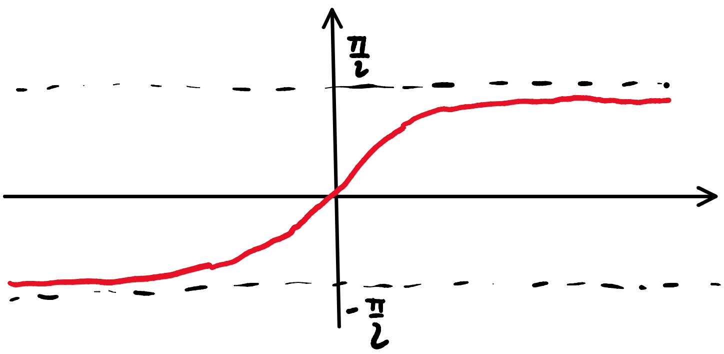
$f(x) = \arctan x$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$f(\mathbb{R}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

f è dispari

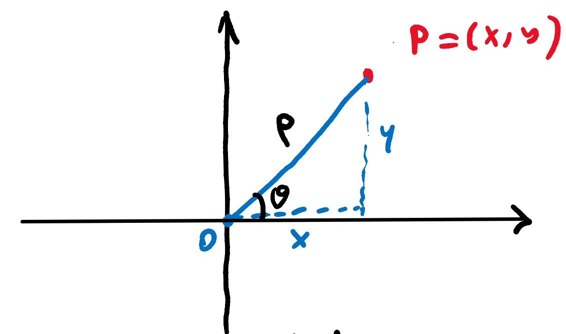
f è strett. monotona crescente.



COORDINATE POLARI DI UN PUNTO NEL PIANO.

Un punto $P \in \mathbb{R}^2$ ha due coordinate: $P = (x, y)$.

(COORDINATE CARTESIANE)



$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ DISTANZA DA $(0,0)$

θ si dice ARGOMENTO

Le quantità ρ, θ sono dette COORDINATE POLARI del punto P.

- Se conosciamo (ρ, θ) è facile trovare x, y:

$$x = \rho \cdot \cos\theta$$
$$y = \rho \cdot \sin\theta.$$

- Se conosciamo x, y chi sono ρ, θ?

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x > 0 \\ \pi - \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0 \text{ e } y > 0 \\ \frac{3}{2}\pi \quad \left(o\ -\frac{\pi}{2}\right) & \text{se } x = 0 \text{ e } < 0. \end{cases}$$

Numeri Complessi

In $\mathbb{R}$ l'equazione $x^2 + 1 = 0$ non ha soluzioni.

Si introduce un nuovo numero i (UNITÀ IMMAGINARIA) con la proprietà $i^2 = -1$.

Def: Un NUMERO COMPLESSO è un numero della forma $x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$

$1 + i$ $\qquad\qquad$ $i = 0 + i$

$3 - i$ $\qquad\qquad$ $3 = 3 + 0 \cdot i$

$\pi + 172 i$ $\qquad\qquad$ $1 + \sqrt{3}\, i$

Simbolo

$\mathbb{C} := \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. (INSIEME DEI NUMERI COMPLESSI)

Dato un numero complesso $z = x + iy$.
Il numero reale x si dice PARTE REALE DI z $(\mathrm{Re}(z))$
Il numero reale y si dice PARTE IMMAGINARIA DI z $(\mathrm{Im}(z))$

- $z = 2 + 3i \in \mathbb{C}$

  $\mathrm{Re}(z) = 2 \qquad \mathrm{Im}(z) = 3$

- $z = 17 - 2i$

  $\mathrm{Re}(z) = 17 \qquad \mathrm{Im}(z) = -2$

OSS

- $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ infatti $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 0\}$

  Se $y = 0$: $\quad x + iy = x + i \cdot 0 = x \in \mathbb{R}$.

Operazioni con i numeri complessi:

Def Dati $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ con $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Possiamo definire:

- $z_1 + z_2 := x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$
- $z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

Idea

- $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$

- $(x_1 + i y_1)(x_2 + i y_2) = x_1 x_2 + x_1 i y_2 + i y_1 x_2 + i^2 y_1 y_2$

$$= x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 - y_1 y_2$$

$$= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

ESEMPIO

$$(2+i)\cdot(3-i) = 6 - 2i + 3i - i^2$$

$$= 6 - 2i + 3i - (-1)$$

$$= 6 - 2i + 3i + 1$$

$$= 7 + i.$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1)\cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i.$$

OSS

In $\mathbb{C}$ si possono risolvere equazioni del tipo $z^2 + a = 0$ con $a > 0$.

Infatti

$$z^2 - (-a) = z^2 - (-1)a = z^2 - i^2 a$$

$$= z^2 - i^2(\sqrt{a})^2$$

$$= z^2 - (i\sqrt{a})^2$$

$$= (z - i\sqrt{a})(z + i\sqrt{a})$$

$$z^2 + a = 0 \iff (z - i\sqrt{a})(z + i\sqrt{a}) = 0$$

$$\iff z - i\sqrt{a} = 0 \quad \vee \quad z + i\sqrt{a} = 0$$

$$\iff z = i\sqrt{a} \quad \vee \quad z = -i\sqrt{a}$$

ESEMPI

- $z^2 = -2 \iff z = \pm i\sqrt{2}$

(formalmente $z = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{-1}\sqrt{2} = \pm i\sqrt{2}$)

- $z^2 = -\pi \iff z = \pm i\sqrt{\pi}$
- $z^2 = 2 \iff z = \pm\sqrt{2}$.