MATEMATICA - LEZIONE 12

martedì 22 ottobre 2024 11:00

Funzioni elementari:

1) costanti $f(x) = c$.
2) identità $f(x) = x$.
3) affini $f(x) = mx + q$.
4) valore assoluto $f(x) = |x|$.
5) potenze con esponente naturale: $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
6) potenze con esponente intero negativo: $f(x) = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Nota:

- $f(x) = mx + q$ (funzione affine)

Il grafico è una retta (non verticale)

Equazione di una retta (non verticale)

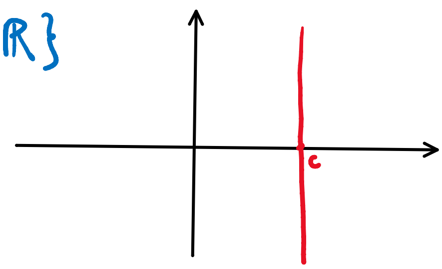
$y = mx + q$

equivalente a $x = \frac{y-q}{m} \iff x = \frac{y}{m} - \frac{q}{m}$

Se m è molto grande il termine $\frac{y}{m}$ diventa trascurabile mentre il termine $-\frac{q}{m}$ non necessariamente

Una retta verticale ha equazione del tipo $\boxed{x = c}$

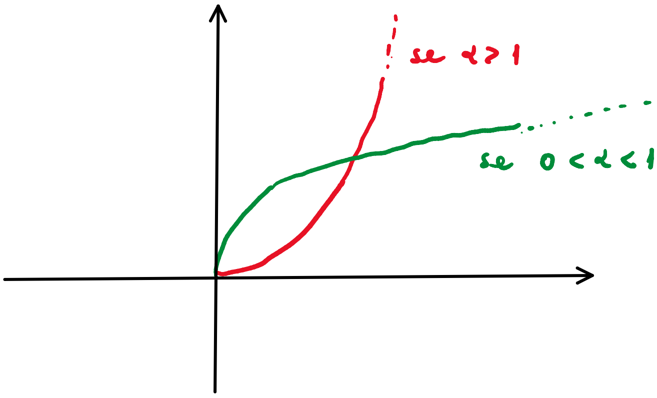
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = c,\ y \in \mathbb{R}\}$



7) POTENZE REALI POSITIVE (CON ESPONENTE POSITIVO)

$f(x) = x^{\alpha}$ con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\alpha > 0$.

- $\mathrm{Dom}(f) = [0, +\infty)$
- $f([0,+\infty)) = [0,+\infty)$
- f è monotona strettamente crescente



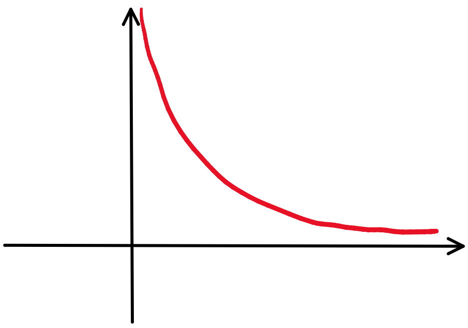
- $g : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$, $x \longmapsto x^{\alpha}$ è invertibile

$g^{-1} : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$, $x \longmapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$

8) POTENZE REALI CON ESPONENTE NEGATIVO

$f(x) = x^{-\alpha}$ con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\alpha > 0$.

$= \frac{1}{x^{\alpha}}$



- $\mathrm{Dom}(f) = (0, +\infty)$
- $f((0,+\infty)) = (0,+\infty)$
- f è strett. decrescente.
- $g : (0,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$, $x \longrightarrow x^{-\alpha}$ è invertibile

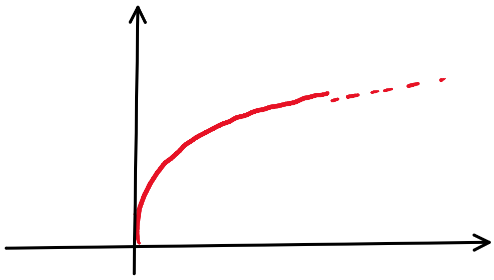
$g^{-1} : (0,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$, $x \longmapsto x^{-\frac{1}{\alpha}}$

OSS

Conoscere i grafici delle potenze permette di disegnare i grafici delle radici. Ma le radici a volte sono definite anche per $x < 0$. In tal caso il grafico si disegna sfruttando la simmetria.

- $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

  $Dom(f) = [0, +\infty)$

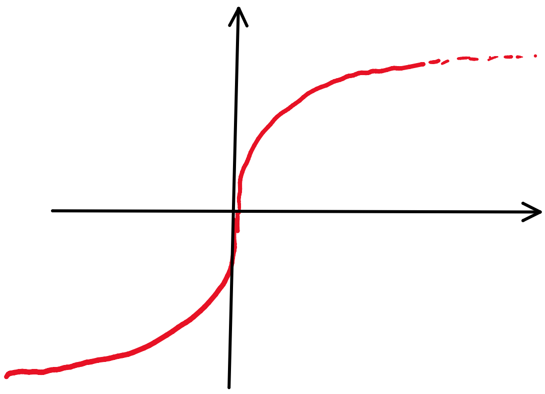


- $f(x) = \sqrt[3]{x}$

  $Dom(f) = \mathbb{R}$

  Attenzione $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ solo per $x \geq 0$.

  Per $x<0$, possiamo disegnare il grafico sfruttando la simmetria



  Infatti $\sqrt[3]{x}$ è dispari:

  $\sqrt[3]{-x} = \sqrt[3]{-1} \cdot \sqrt[3]{x} = -\sqrt[3]{x}$

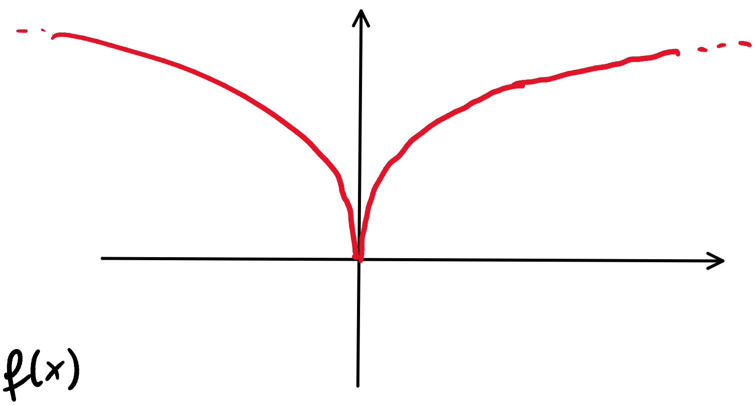
- $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

  $Dom(f) = \mathbb{R}$

  Per $x \geq 0$ $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

  $f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^2} = \sqrt[3]{x^2} = f(x)$

  f è pari.

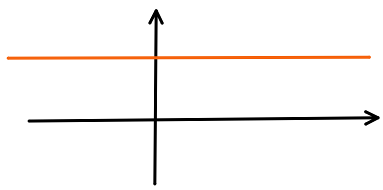


---

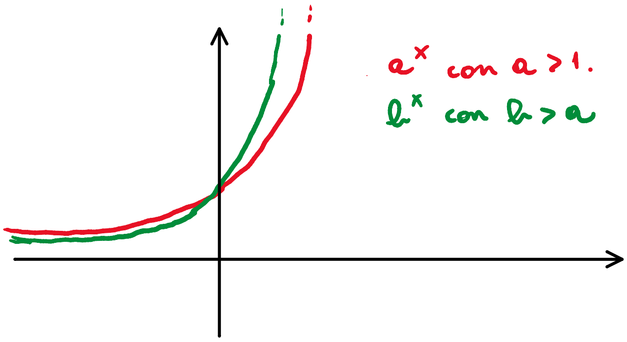
9) ESPONENZIALI

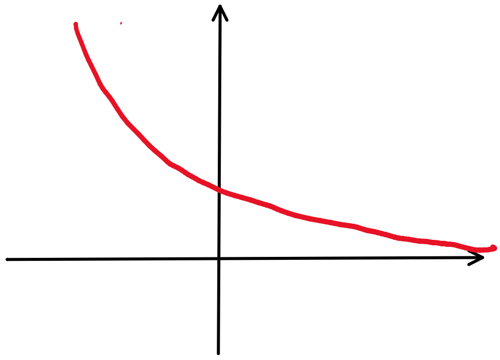
$f(x) = a^x$ dove $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

- $a = 1$: $f(x) = 1^x = 1$



- Se $a > 1$:





- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$
- f è strett. crescente se $a > 1$ e strett. decrescente se $0 < a < 1$.
- Se $a \neq 1$, la funzione

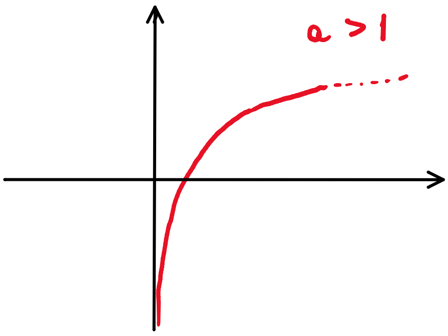
$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & (0, +\infty) \\ x & \longmapsto & a^x \end{array} \quad \text{è invertibile}$$

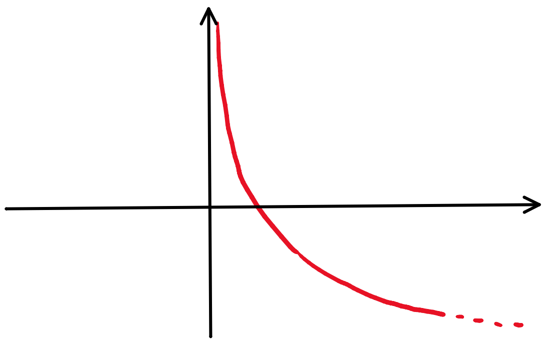
$$g^{-1} : \begin{array}{ccc} (0, +\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \log_a x \end{array}$$

$$\boxed{a^x = y \iff x = \log_a y}$$

10) LOGARITMI

$f(x) = \log_a x$ con $a > 0$, $a \neq 1$.

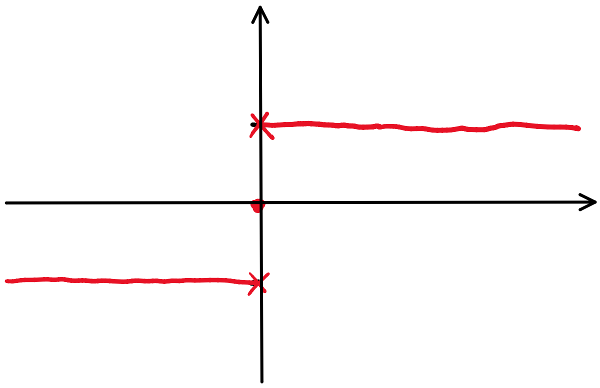




$\mathrm{Dom}(f) = (0, +\infty)$

11) FUNZIONE SEGNO

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



(si indica con $\mathrm{sgn}(x)$)

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

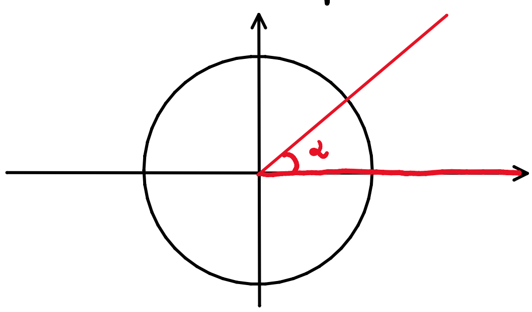
OSS

$\forall x \in \mathbb{R} : \quad x = \mathrm{sgn}(x) \cdot |x|.$

Funzioni Trigonometriche ($\sin x$ / $\cos x$ / $\mathrm{tg}\, x$ / $\mathrm{cotg}\, x$ e le loro inverse)

Def: Definiamo CIRCONFERENZA GONIOMETRICA la circonferenza nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ di centro $(0,0)$ e raggio 1.
(Equazione: $x^2 + y^2 = 1$)

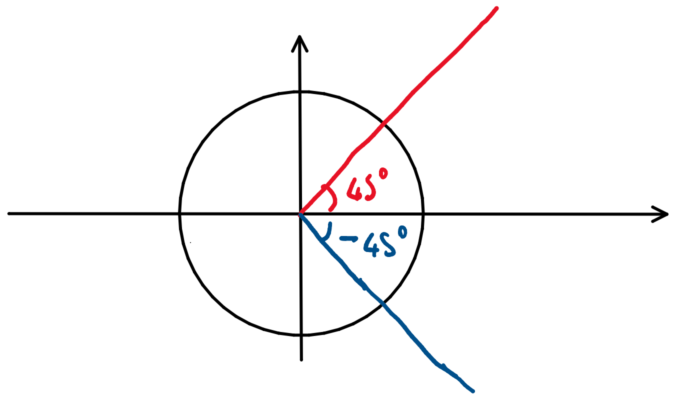
OSS: Ogni angolo si può rappresentare sulla circonferenza tracciando una semiretta uscente da $(0,0)$ e identificando l'angolo con quello compreso tra il semiasse positivo delle x e la semiretta tracciata.



Convenzione (angoli orientati):

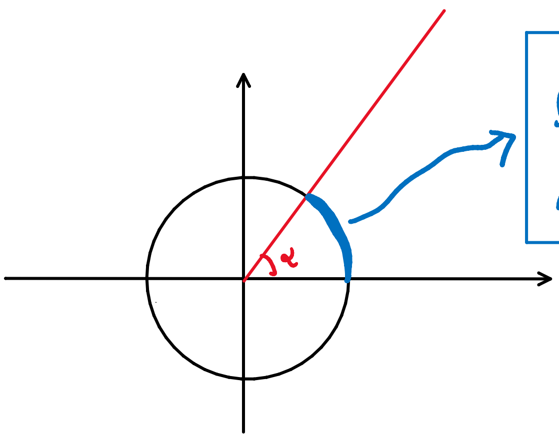
Angoli "positivi": si ottengono ruotando in senso antiorario

Angoli "negativi": si ottengono ruotando in senso orario.



Nota: ogni angolo individua un arco sulla circonferenza goniometrica.

Def: La MISURA IN RADIANTI di un angolo α è la lunghezza dell'arco individuato da α sulla circonferenza goniometrica.



lunghezza dell'arco
=
misura in radianti di α

Conversione di alcuni angoli noti

gradi		radianti	
$360°$	$\longleftrightarrow$	2π	(ANGOLO GIRO)
$180°$	$\longleftrightarrow$	π	(ANGOLO PIATTO)
$90°$	$\longleftrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$	(ANGOLO RETTO)
$45°$	$\longleftrightarrow$	$\frac{\pi}{4}$	
$30°$	$\longleftrightarrow$	$\frac{\pi}{6}$	
$60°$	$\longleftrightarrow$	$\frac{\pi}{3}$	

Ci sono tanti altri angoli che si ottengono da questi:

$$135° = 90° + 45° \longleftrightarrow \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi.$$

$$15° \longleftrightarrow \frac{\pi}{12}.$$

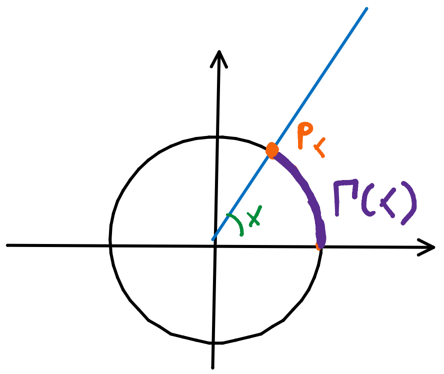
In generale la conversione si può fare tramite una proporzione

Se:
- α è la misura in gradi
- x è la misura in radianti

allora
$$\boxed{\frac{\alpha}{180} = \frac{x}{\pi}}$$

Quindi $\alpha = \frac{x}{\pi} \cdot 180$ e $x = \frac{\alpha}{180} \cdot \pi$

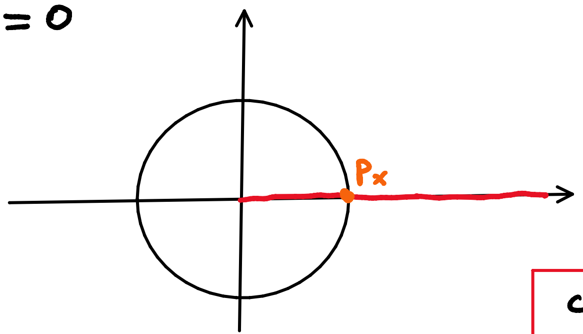
Def: Sia $x \in \mathbb{R}$ e sia $\Gamma(x)$ l'arco (di lunghezza x) sulla circonferenza goniometrica che corrisponde all'angolo di ampiezza in radianti pari ad x. Sia P_x il punto finale di $\Gamma(x)$. Le coordinate di P_x in $\mathbb{R}^2$ si dicono COSENO e SENO di x



$$P_x = (\cos x, \sin x)$$

ESEMPI

- $x = 0$

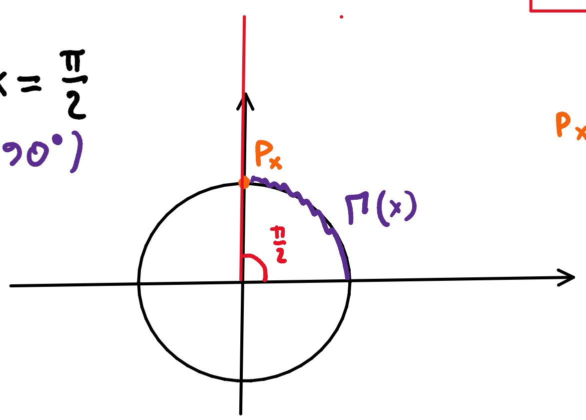


$P_x = (1, 0)$

Quindi

$$\boxed{\begin{aligned} \cos 0 &= 1 \\ \sin 0 &= 0 \end{aligned}}$$

- $x = \frac{\pi}{2}$ $(90°)$

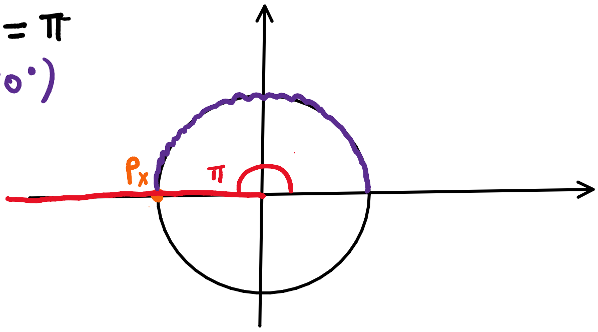


$P_x = (0, 1)$

Quindi:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{2} &= 0 \\ \sin \frac{\pi}{2} &= 1 \end{aligned}}$$

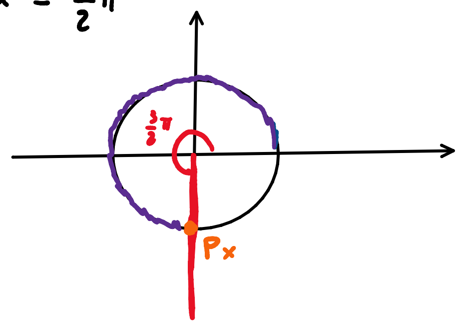
• $x = \pi$
$(180°)$



$P_x = (-1, 0)$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos x &= -1 \\ \sin x &= 0 \end{aligned}}$$

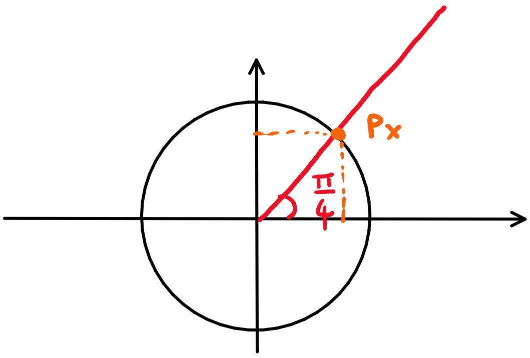
• $x = \frac{3}{2}\pi$

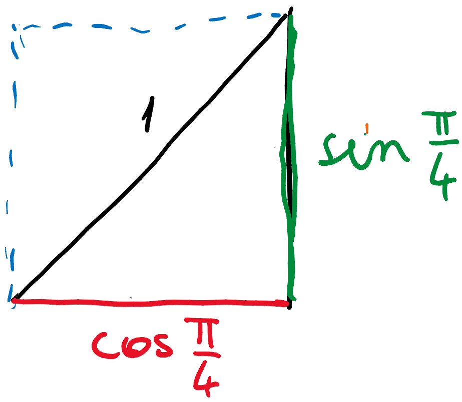


$P_x = (0, -1)$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) &= 0 \\ \sin\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) &= -1 \end{aligned}}$$

• $x = \frac{\pi}{4}$ $(45°)$



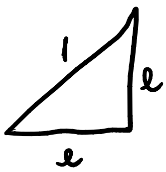


Notiamo che $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$ e $\cos^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{4} = 1$

Quindi $2\cos^2\frac{\pi}{4} = 1 \iff \cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$

$\iff \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Nota: in un triangolo rettangolo isoscele di ipotenusa 1:

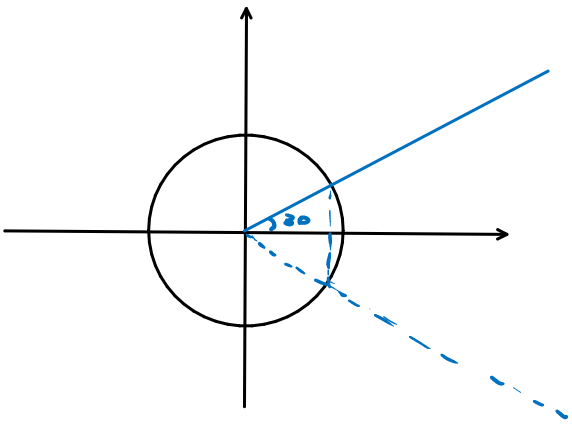


$$\ell^2 + \ell^2 = 1$$
$$2\ell^2 = 1$$
$$\ell^2 = \frac{1}{2}$$
$$\ell = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

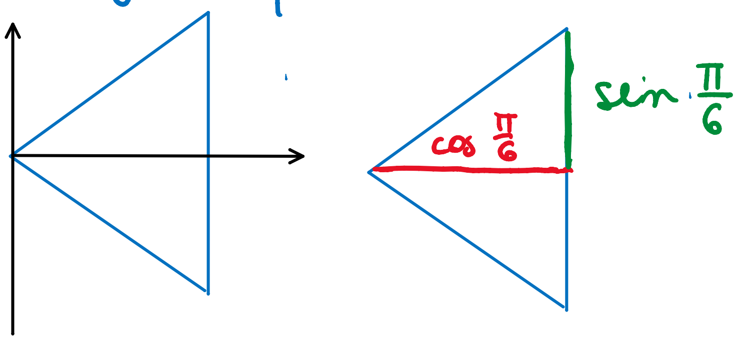
Ricordare:

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}}$$

- $x = \frac{\pi}{6}$



Triangolo equilatero di lato 1

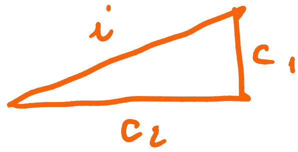


Troviamo che $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
e con il Teorema di Pitagora: $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Quindi

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}}$$

Teorema di Pitagora



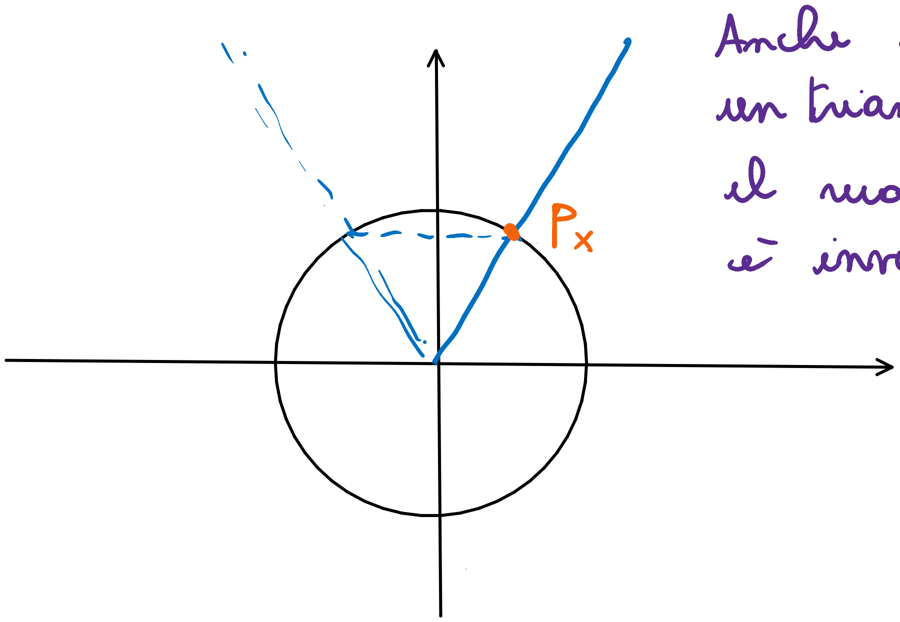
$i^2 = c_1^2 + c_2^2$

$c_2 = \sqrt{i^2 - c_1^2}$

Nel nostro caso $i = 1$ e $c_1 = \frac{1}{2}$ quindi

$c_2 = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

- $x = \frac{\pi}{3}$

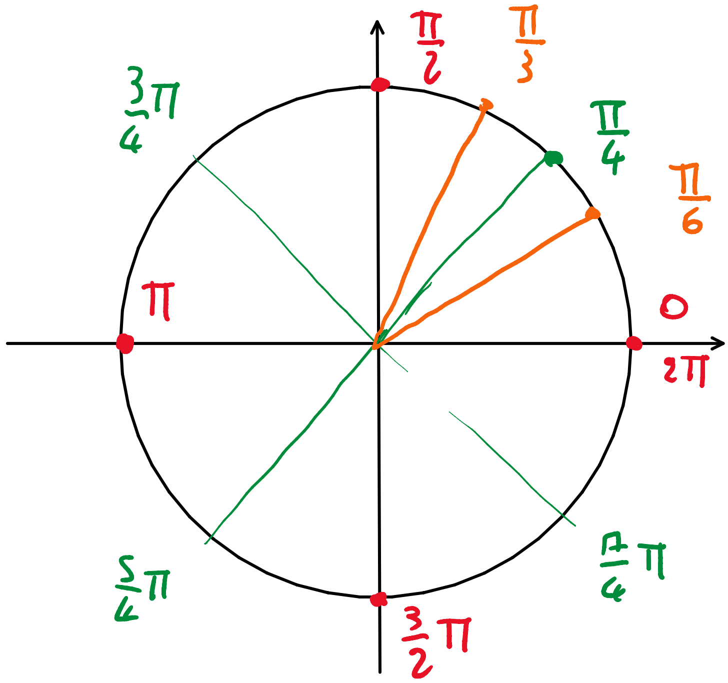


Anche in questo caso è un triangolo equilatero ma il ruolo di seno e coseno è invertito

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

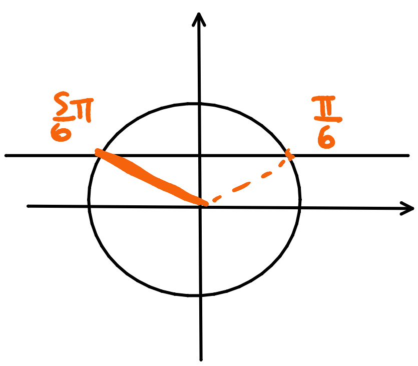
Tabella di riepilogo sui valori di coseno e seno

x	$\cos x$	$\sin x$
0	1	0
$\frac{\pi}{2}$	0	1
π	-1	0
$\frac{3}{2}\pi$	0	-1
2π	1	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$



Altri angoli si possono ricondurre a questi:

Ad esempio $x = \frac{5}{6}\pi$:



$$\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

PROPRIETÀ

1) $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

2) $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $-1 \leq \cos x \leq 1$ e $-1 \leq \sin x \leq 1$

(cioè $|\cos x| \leq 1$ e $|\sin x| \leq 1$).

3) $\forall\, k \in \mathbb{Z}$ e $\forall\, x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$$
$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$$

4) $\forall\, x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\sin(-x) = -\sin x$$