MATEMATICA - LEZIONE 11

lunedì 21 ottobre 2024 07:54

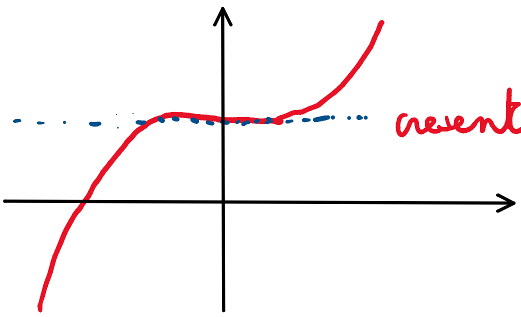
FUNZIONI

- $f: X \longrightarrow Y$ con X, Y insiemi
- Dominio / codominio / immagine
- Funzioni iniettive / suriettive / biettive
- Composizione di funzioni
- Funzioni inverse di funzioni biettive.
- Funzioni monotone.

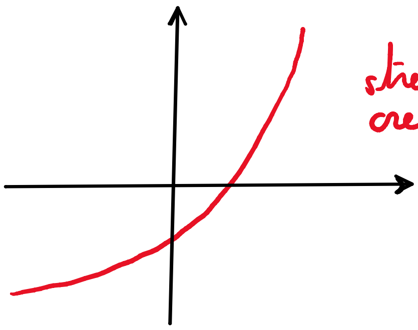
Def: Sia $f: X \longrightarrow Y$ con $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Allora:

1) Si dice che f è MONOTONA CRESCENTE IN X se
$\forall x_1, x_2 \in X: \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

2) Si dice che f è MONOTONA STRETTAMENTE CRESCENTE se
$\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$



crescente



strett. crescente.

3) Si dice che f è MONOTONA DECRESCENTE se
$\forall x_1, x_2 \in X: \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

4) Si dice che f è MONOTONA STRETTAMENTE DECRESCENTE se
$\forall x_1, x_2 \in X: \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

OSS 1

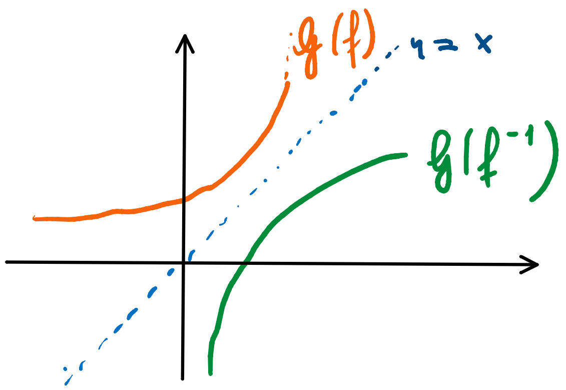
Se f è strettamente monotona, allora f è iniettiva.

OSS 2

$(x,y) \in \mathcal{G}(f) \iff y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$
$\iff (y,x) \in \mathcal{G}(f^{-1})$

Quindi:

Il grafico di f^{-1} si ottiene ribaltando $\mathcal{G}(f)$ rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.



OSS 3 Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione strettamente monotona. Allora $f: I \longrightarrow f(I)$ è invertibile e $f^{-1}: f(I) \longrightarrow I$ è strettamente monotona (dello stesso tipo di f)

Simmetrie del grafico di una funzione.

Def: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$. Si dice che X è SIMMETRICO RISPETTO A 0 se: $x \in X \Rightarrow -x \in X$.

ESEMPI

- $(-1, 1)$ è simmetrico
- $[-3, 3]$ è simmetrico
- $(-4, 4]$ non è simmetrico ($4 \in (-4,4]$ ma $-4 \notin (-4,4]$)
- $(-2, 3)$ non è simmetrico
- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ è simmetrico
- $(-2,-1) \cup (1,2)$ è simmetrico.

Def: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un insieme simmetrico rispetto a 0 e sia $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$.

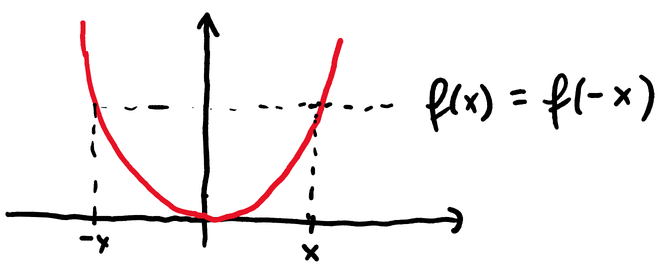
1) Si dice che f è PARI se:
$$\forall x \in X: \quad f(-x) = f(x)$$
2) Si dice che f è DISPARI se
$$\forall x \in X: \quad f(-x) = -f(x).$$

ESEMPI:

1) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$

$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

f è pari.

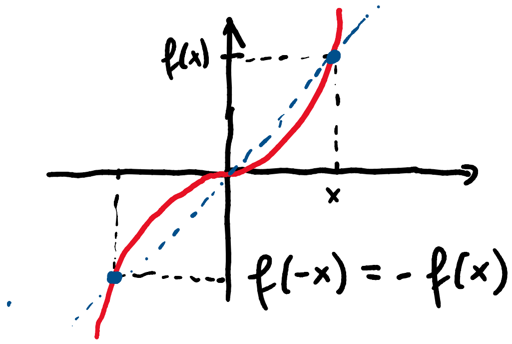


oss: Il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse y (cioè non cambia se ribaltato rispetto all'asse y).

2) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^3$

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3 \cdot x^3 = -x^3 = -f(x)$$

f è dispari.



oss: Il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto a 0, cioè non cambia se ribaltato rispetto a (0,0) (ovvero, se ribaltato prima rispetto a un asse e poi rispetto all'altro.

Ci sono funzioni che non sono né pari né dispari.

- $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longmapsto e^x$

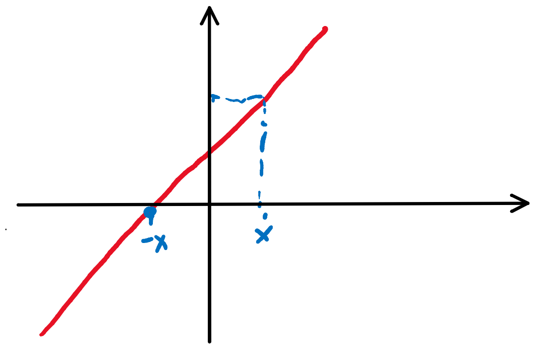
  $f(-x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ $\quad (\neq f(x) \text{ e } \neq -f(x))$

  f non è pari né dispari.

- $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longmapsto x+1$

  $f(-x) = -x+1 = -(x-1)$ $\quad (\neq f(x) \text{ e } \neq -f(x))$

  non è pari né dispari



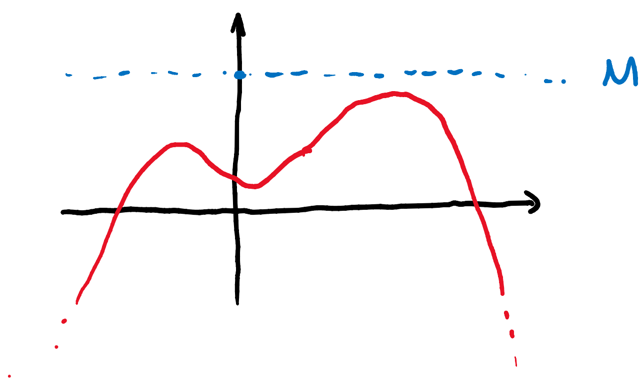
Funzioni limitate:

Def: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un insieme e sia $f: X \to \mathbb{R}$ una funzione.

1) Si dice che f è SUPERIORMENTE LIMITATA se se $f(X)$ è un insieme superiormente limitato (cioè $\exists\, M \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in X: f(x) \leq M$)

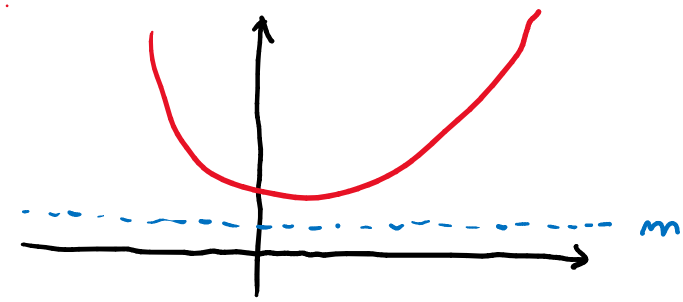
2) Si dice che f è INFERIORMENTE LIMITATA se $f(X)$ è un insieme inferiormente limitato cioè ($\exists\, m \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in X : f(x) \geq m$)

3) Si dice che f è LIMITATA se lo è sia superiormente che inferiormente.



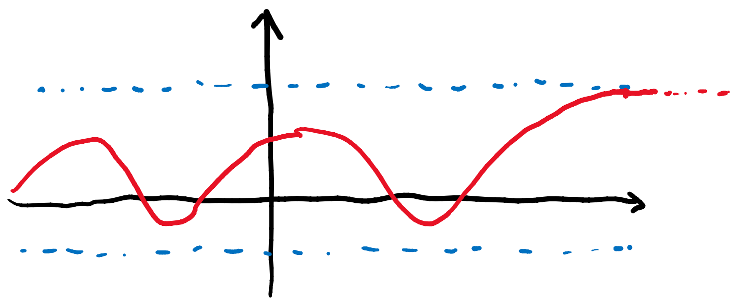
Superiormente limitata.

Il grafico si trova sotto una retta orizzontale.



inferiormente limitato.

Il grafico si trova sempre sopra una retta orizzontale.



limitata

OSS: Il grafico di una funzione limitata compreso tra due rette orizzontali.

OSS 2:

f è limitata $\iff \exists M \in \mathbb{R}, M > 0$ t.c. $\forall x \in X : -M \leq f(x) \leq M$.

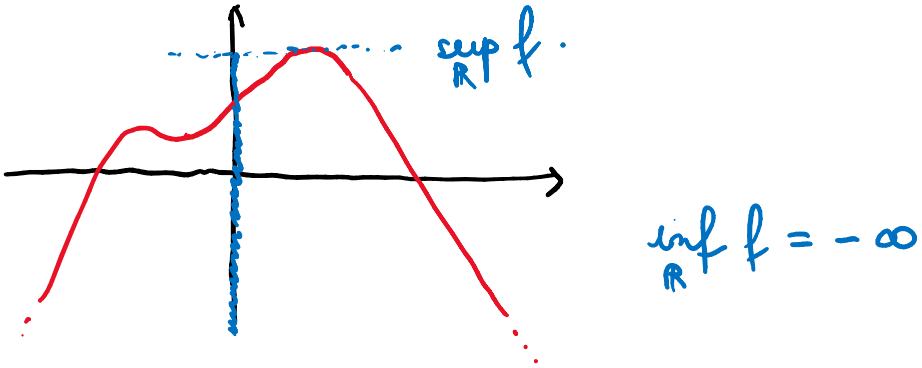
$\iff \exists M \in \mathbb{R}, M > 0$ t.c. $\forall x \in X : |f(x)| \leq M$.

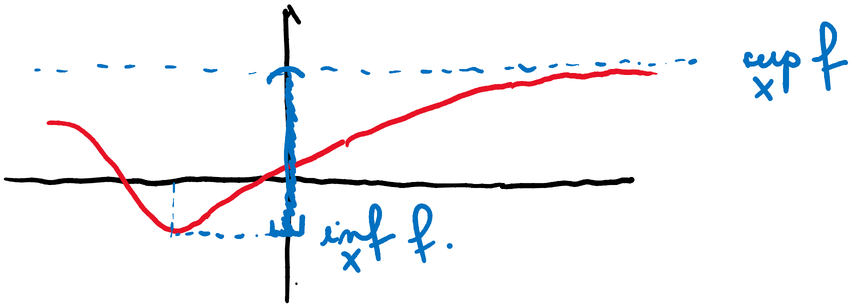
Def: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : X \to \mathbb{R}$. Si definisce ESTREMO SUPERIORE DI f IN X l'estremo superiore di $f(X)$.

Si scrive $\sup_X f := \sup f(x)$

Analogamente, si definisce ESTREMO INFERIORE DI f l'estremo superiore di $f(X)$.

Si scrive: $\inf_X f := \inf f(X)$





Convenzione: Per funzioni $f: X \longrightarrow Y$ con $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ (FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE) spesso si indica solo l'espressione di $f(x)$ senza specificare chi sono X e Y.

In tal caso si intende che:

- X è il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ in cui f è definita (DOMINIO NATURALE di f o CAMPO DI ESISTENZA)

  Si indica con $\mathrm{Dom}(f)$

- $Y = \mathbb{R}$.

ESEMPI

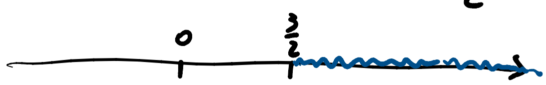
1) $f(x) = \dfrac{1}{x(x-2)}$ $\qquad Y = \mathbb{R}$.

c.e: $\quad x(x-2) \neq 0 \iff x \neq 0 \wedge x \neq 2$.

$X = \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} = (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$.

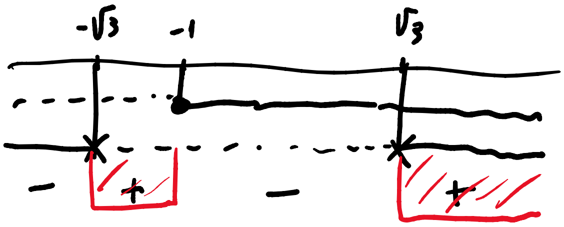
2) $f(x) = \sqrt{2x-3}$ $\qquad 2x - 3 \geq 0 \iff x \geq \frac{3}{2}$

$\mathrm{Dom}(f) = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$



3) $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{x+1}{x^2-3}}$

c.e.: $\begin{cases} \dfrac{x+1}{x^2-3} \geq 0 \\ x^2 - 3 \neq 0 \end{cases}$



$-\sqrt{3} < x \leq -1 \quad \vee \quad x > \sqrt{3}$

$\mathrm{Dom}(f) = (-\sqrt{3}, -1] \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

$\left(\mathrm{Dom}(f): \ -\sqrt{3} < x \leq -1 \quad \vee \quad x > \sqrt{3} \right)$

$\left(\mathrm{Dom}(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} < x \leq -1 \ \vee \ x > \sqrt{3} \} \right)$

4) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1}{x+2}}$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$

5) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[6]{x^4+2}}$

$x^4+2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}.$

6) $f(x) = e^{7x}$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

7) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

c.e: $x \neq 0$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

8) $f(x) = \dfrac{1}{2^x - 4}$

c.e: $2^x - 4 \neq 0.$

$2^x \neq 4$

$2^x \neq 2^2$

$x \neq 2$

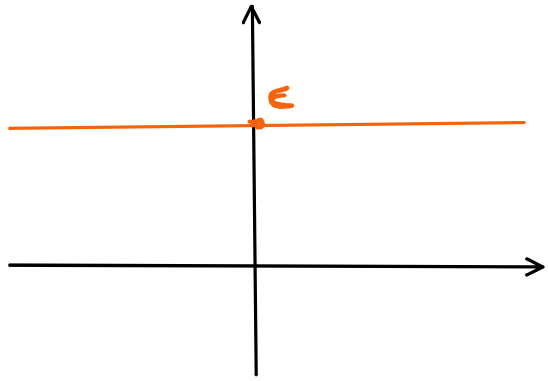
$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$

Condizioni da imporre per determinare i domini:

- Denominatori $\neq 0$.
- Argomenti delle radici di indice pari devono essere ≥ 0.
- Argomenti dei logaritmi devono essere > 0.

FUNZIONI ELEMENTARI

1) FUNZIONI COSTANTI



$f(x) = c$ con $c \in \mathbb{R}$.

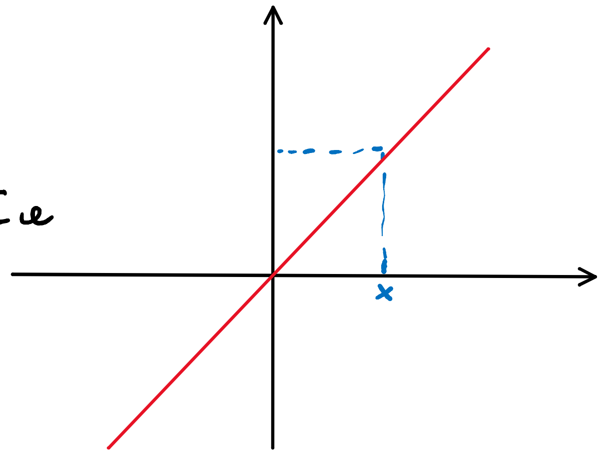
$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$\mathcal{G}(f)$ è una retta orizzontale

$f(\mathbb{R}) = \{c\}$

($y = c$ equazione della retta
$\{(x, c) \mid x \in \mathbb{R}\}$ retta)

2) FUNZIONE IDENTITÀ (DI $\mathbb{R}$)



$f(x) = x$

- $\mathcal{G}(f)$ è la bisettrice del I e III quadrante
- $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

3) FUZIONI AFFINI (il grafico è una retta)

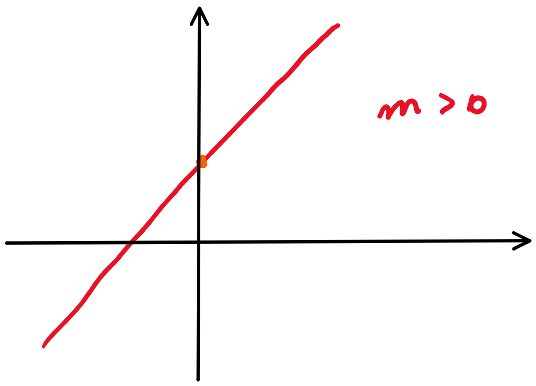
$f(x) = mx + q$, $m, q \in \mathbb{R}$.

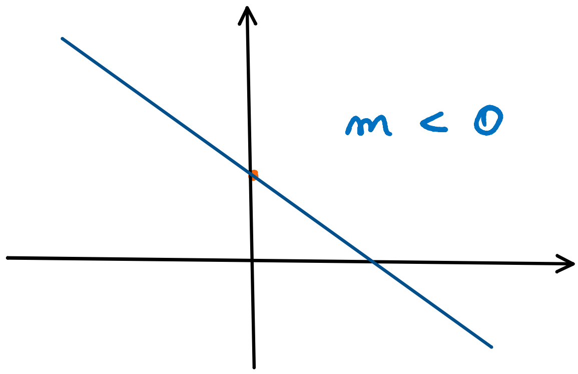
m si dice COEFFICIENTE ANGOLARE

q si dice TERMINE NOTO

- $m = 0$: funzione costante $f(x) = q$
- $m = 1$ e $q = 0$ funzione identità.

m determina la pendenza del grafico, q è uno spostamento verticale.





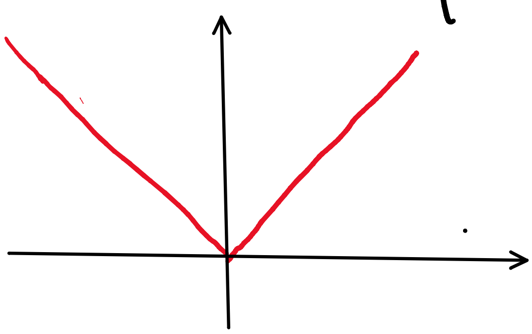
- Se $m \neq 0$, f è strettamente monotona (se $m>0$ è crescente / se $m<0$ è decrescente)
- Se $m \neq 0$, f è biettiva e

$$
\begin{aligned}
y = f(x) &\iff y = mx + q \\
&\iff mx = y - q \\
&\iff x = \frac{y-q}{m} = \frac{y}{m} - \frac{q}{m} \\
&\iff f^{-1}(y) = \frac{y}{m} - \frac{q}{m}.
\end{aligned}
$$

Possiamo dire che: $f^{-1}(x) = \frac{x}{m} - \frac{q}{m}$.

4) VALORE ASSOLUTO

$$
f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}
$$



- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$

- non è iniettiva né suriettiva
- f è pari:
- $\forall x \in \mathbb{R}$: $|-x| = |x|$

- f non è monotona ma:
  - è monotona strett. crescente in $[0,+\infty)$
  - è monotona strett. decrescente in $(-\infty,0]$

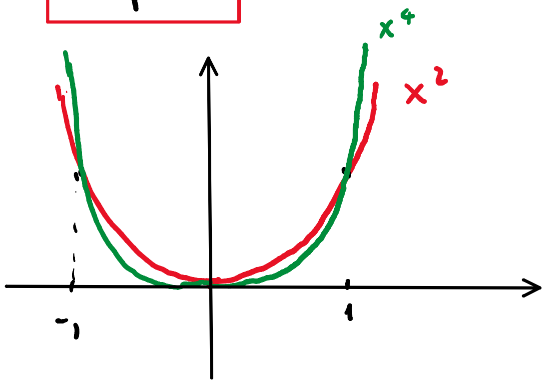
5) POTENZE (CON ESPONENTE NATURALE)

$$f(x) = x^n \quad , \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

- $n = 1$: funzione identità.

Ci interessa $n \geq 2$:

$\boxed{n \text{ pari}}$



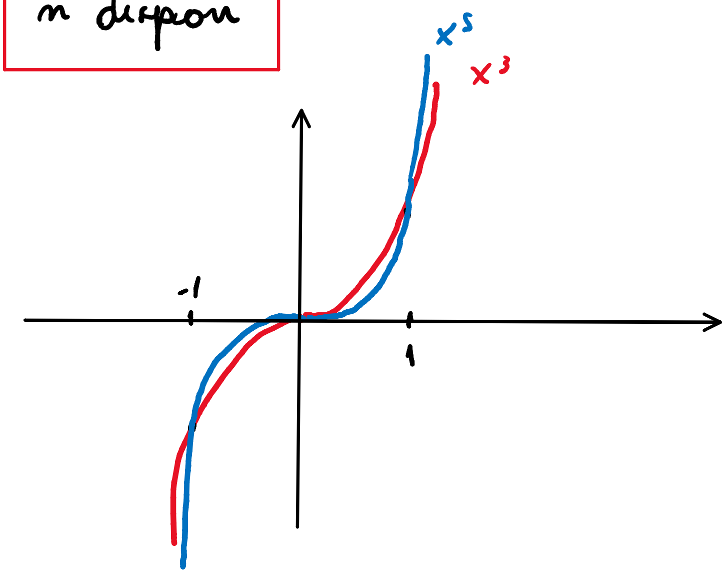
- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$
- f non è iniettiva né suriettiva
- f è pari
- f non è invertibile ma

$$g: [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$$
$$x \longmapsto x^n$$

è invertibile e

$$g^{-1}: [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$$
$$x \longmapsto \sqrt[n]{x}$$

$\boxed{n \text{ dispari}}$

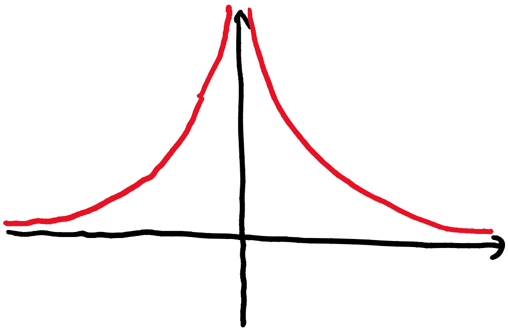


- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
- f è monotona strett. crescente.
- f è biettiva.
- f è dispari.
- f è invertibile e

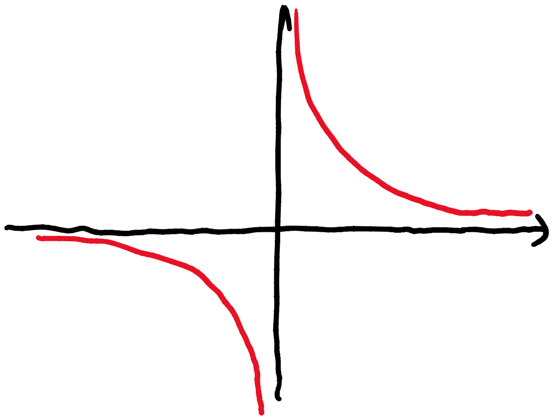
$$f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sqrt[n]{x}.$$

6) POTENZE INTERE NEGATIVE

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad , \; n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}.$$



- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
- $f(\mathbb{R}\setminus\{0\}) = (0,+\infty)$
- f è pari
- f non è monotona
- non è iniettiva né suriettiva



- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
- $f(\mathbb{R}\setminus\{0\}) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
- f è dispari.
- f non è monotona
- f è iniettiva ma non suriettiva.