MATEMATICA LEZIONE 1

mercoledì 2 ottobre 2024 09:04

Docenti:

Gabriele Mancini
gabriele.mancini@uniba.it

Alessandro Palmieri
alessandro.palmieri@uniba.it

Dipartimento di Matematica
ufficio: secondo piano, stanza 30

Ricevimento: lunedì 14:30 - 16:30

Pagina web: https://www.dm.uniba.it/members/mancini

Canale teams del corso: codice **i6hfurs**

Tutor:

Tommaso Monni
tommaso.monni@uniba.it

Lezioni

- Lunedì 9:00 - 11:00
- Mercoledì 9:00 - 11:00
- Giovedì 14:00 - 16:00
- Venerdì 11:00 - 13:00

Esame

- Prova scritta (calendario indicato sulla pagina del dipartimento)
- Prova orale **facoltativa** (qualche giorno dopo la prova scritta)

Programma del corso:

1. Richiami:
   - Insiemi e Logica
   - Numeri (insiemi numerici)
   - Equazioni e disequazioni
   - Funzioni
   - successioni

2. Funzioni di una variabile

   - funzioni reali di variabile reale:
     - Limiti
     - Continuità
     - Derivabilità e calcolo differenziale
     - Grafici di funzioni
     - Ottimizzare funzioni (trovare massimi e minimi)
     - Calcolo integrale

3. Equazioni differenziali ordinarie (EDO)
   - EDO di primo ordine a variabili separabili
   - EDO di primo ordine lineari
   - EDO di secondo ordine lineari a coefficienti costanti

4. Successioni e serie

5. Funzioni di più variabili (cenni)

Libri consigliati:

- BRAMANTI, CONFORTOLA, SALSA - Matematica per le Scienze
- BERTSCH, DALL'AGLIO, GIACOMELLI - Epsilon 1, primo corso di analisi matematica

Nota: Gli appunti delle lezioni saranno disponibili sulla pagina web del corso e sul canale teams

Insiemi e Logica.

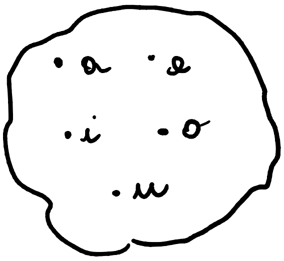
Un INSIEME è una collezione di oggetti detti ELEMENTI dell'insieme

ESEMPI

1) $A = \{1, -1, 5, 17\} = \{-1, 17, 5, 1\}$

2) $B = \{a, e, i, o, u\}$

$= \{x \mid x \text{ è una vocale dell'alfabeto italiano}\}$



tale che

3) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è pari}\}$

appartiene

$= \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$= \{n \in \mathbb{N} \mid \frac{n}{2} \in \mathbb{N}\}$

Tale che
si indica con:
t.c.
|
su alcuni libri
anche con
:

Simboli utili

- $\in$ (appartiene)

Si usa per specificare che un elemento appartiene ad un insieme:

$14 \in \mathbb{N}$

$a \in \{a, b, c, d\}$

- $\notin$ (non appartiene)

$\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$

$f \notin \{a, b, c, d\}$

- $\emptyset$ (insieme VUOTO)
- $\subseteq$ (inclusione tra insiemi)

$A \subseteq B$ vuol dire: ogni elemento di A appartiene anche a B.

$A \subseteq B$ si legge:

- A è contenuto in B.
- B contiene A
- A è un sottoinsieme di B

$\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, d\}$

$\{1, 3\} \subseteq \mathbb{N}$

- $\nsubseteq$: $A \nsubseteq B$ (A non è contenuto in B)

Vuol dire: almeno uno degli elementi di A non appartiene a B.

$\{3, \frac{1}{4}\} \nsubseteq \mathbb{N}$

- $\subsetneq$ (o $\subsetneqq$, $\subset$) Simbolo di inclusione stretta

Vuol dire: $A \subseteq B$ e $A \neq B$.

$\{1, 3\} \subsetneq \mathbb{N}$

- Simboli QUANTIFICATORI:

- $\forall$ (ogni / per ogni)
- $\exists$ (esiste)

- $\nexists$ (non esiste)
- $\exists!$ (esiste ed è unico)

- <u>Simboli logici</u>:
- $\Rightarrow$ implicazione (o $\Leftarrow$)

  Si usa tra due affermazioni per dire che se la prima affermazione è vera, è vera anche la seconda

- $\not\Rightarrow$ (non implica)
- $\Leftrightarrow$ (se e solo se)
- $\vee$ (o / oppure)
- $\wedge$ (e)
- $\neg$ (negazione)

<u>ESEMPI</u>

1) Sia $x \in \mathbb{N}$. Se x non è pari, allora è dispari.

   Questa frase si può scrivere come:

- x non è pari $\Rightarrow$ x è dispari
- $\neg$ (x è pari) $\Rightarrow$ x è dispari.

2) $\forall x \in \mathbb{N}$: x è pari $\vee$ x è dispari

3) Ogni numero naturale multiplo di 4 è pari.
   - $\forall x \in \mathbb{N}$: x multiplo di 4 $\Rightarrow$ x è pari
   - Sia $x \in \mathbb{N}$: x multiplo di 4 $\Rightarrow$ x è pari.

4) Sia $x \in \mathbb{N}$:

x è multiplo di $4 \iff \exists K \in \mathbb{N}$ t.c. $x = 4K$.

5) $\neg$ ($\forall n \in \mathbb{N}$: n è pari $\vee$ n è multiplo di 3)

$\iff$

$\exists n \in \mathbb{N}$: n non è pari $\wedge$ n non è multiplo di 3

6) Siano $a, b \in \mathbb{N}$:

a è pari $\wedge$ b è pari $\Rightarrow$ $a + b$ è pari.

a è pari $\vee$ b è pari $\not\Rightarrow$ $a + b$ è pari.

a è pari $\vee$ b è pari $\Rightarrow$ $a \cdot b$ è pari.

Def: Siano A e B due insiemi. Si dice che A è un SOTTOINSIEME di B se $A \subseteq B$.

$(\forall x \in A : x \in B)$

$(x \in A \Rightarrow x \in B)$

OSS Siano A e B due insiemi allora:

$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.

$A \neq B \iff A \nsubseteq B \vee B \nsubseteq A$.

Operazioni elementari tra insiemi

- UNIONE.

Def: Siano A e B due insiemi. Definiamo UNIONE tra A e B l'insieme

$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$

• INTERSEZIONE: Siano A e B due insiemi, definiamo INTERSEZIONE tra A e B l'insieme

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$$

• DIFFERENZA:

$$A \setminus B = \{ x \in A \mid x \notin B \}$$

• ESEMPIO

$$A = \{ 1, 14, 18 \}$$

$$B = \{ 10, 20, -25, 14, 18, a \}$$

Abbiamo che:

$$A \cup B = \{ 1, 14, 18, 10, 20, -25, a \}$$

$$A \cap B = \{ 14, 18 \}$$

$$A \setminus B = \{ 1 \}$$

$$B \setminus A = \{ 10, 20, -25, a \}$$

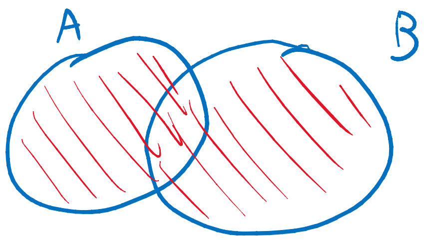
OSS: Siano A e B due insiemi. Allora:
n. di elementi di $A \cup B$ = n. di elementi di A + n. di B − n. di elementi di $A \cap B$.

Def: Siano A e X due insiemi con $A \subseteq X$.
Si definisce COMPLEMENTARE DI A IN X l'insieme:

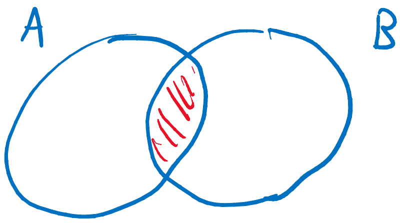
$$\mathcal{C}_X(A) = \{ x \in X \mid x \notin A \} = X \setminus A.$$

Nel caso in cui $X = \mathbb{R}$ spesso $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(A)$ si indica anche con A^c

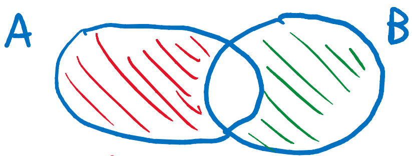
Rappresentazioni grafiche delle operazioni tra insiemi.



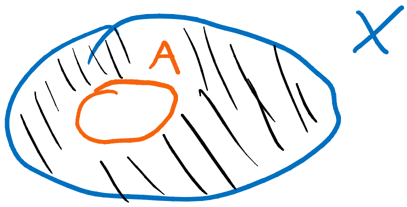
$A \cup B$



$A \cap B$



$A \setminus B$ $\quad$ $B \setminus A$



$$\mathcal{C}_X(A) = X \setminus A$$

ESEMPIO

1) $X = \mathbb{N}$

$$A = \{ 4n \mid n \in \mathbb{N} \}$$

$$\mathcal{C}_X(A) = \{ 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, \dots \}$$
$$= \{ 4n + k \mid n \in \mathbb{N}, k \in \{1, 2, 3\} \}$$

2) $X = \{ 2n \mid n \in \mathbb{N} \}$

$$A = \{ 4n \mid n \in \mathbb{N} \}$$

$$\mathcal{C}_X(A) = \{ 2, 6, 10, \dots \}$$
$$= \{ 4n + 2 \mid n \in \mathbb{N} \}$$

PROPRIETÀ: Siano A, B, C tre insiemi:

1) $A \cup B = B \cup A$

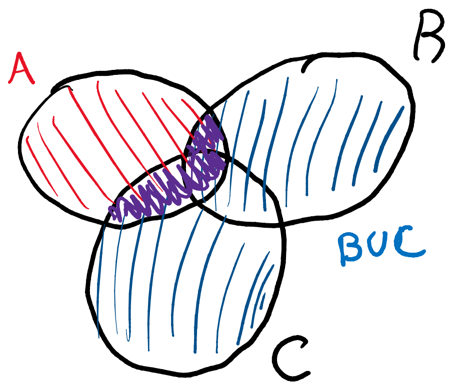
2) $A \cap B = B \cap A$

Mentre abbiamo visto che $A \setminus B \neq B \setminus A$

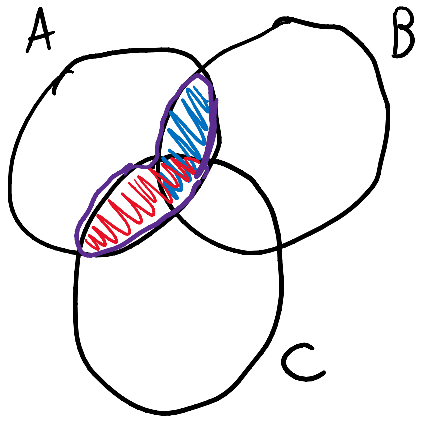
3) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Idea per 4)



$A \cap (B \cup C)$



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

oss Siano A, B, X tre insiemi con $A, B \subseteq X$.

1) $\complement_X (A \cup B) = \complement_X(A) \cap \complement_X(B)$

2) $\complement_X (A \cap B) = \complement_X(A) \cup \complement_X(B)$.

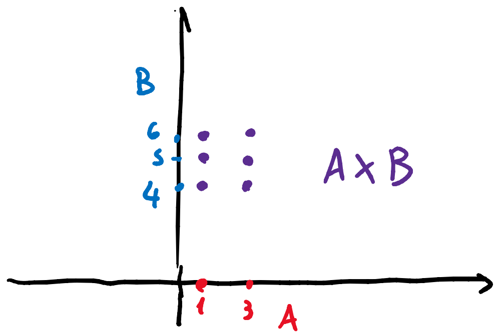
Def: Siano A e B due insiemi. Definiamo PRODOTTO CARTESIANO tra A e B l'insieme

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, \ b \in B \}$$

$A = \{1, 3\}$

$B = \{4, 5, 6\}$

$A \times B = \{(1,4), (1,5), (1,6), (3,4), (3,5), (3,6)\}$



Insiemi numerici

1) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$ NUMERI NATURALI

2) $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$

$= \mathbb{N} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$ NUMERI INTERI (RELATIVI)

3) $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, \ b \neq 0 \right\}$ NUMERI RAZIONALI

oss :

1) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

2) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$

3) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

4) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

Attenzione: è bene evitare scritture del tipo

$\cancel{\dfrac{\frac{a}{b}}{c}}$ si rischia di confondere $\dfrac{a}{\frac{b}{c}}$ con $\dfrac{\frac{a}{b}}{c}$

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$$

ESEMPIO

$$\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$$

Attenzione:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

ma

$$\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$$

MAI SCRIVERE L' =