MATEMATICA - LEZIONE 9

lunedì 16 ottobre 2023 09:03

FUNZIONI

- $f: X \longrightarrow Y$, X, Y insiemi
- Dominio / codominio / immagine
- Funzioni iniettive / suriettive / biettive
- Funzioni monotone ($X \subseteq \mathbb{R}$, $Y \subseteq \mathbb{R}$)
- Composizione di funzioni
- Funzioni inverse di funzioni biettive.

FUNZIONI SIMMETRICHE

Def: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un insieme. Si dice che X è SIMMETRICO RISPETTO A 0 se: $\forall x \in X$, $-x \in X$.

ESEMPI

$X = (-1, 1)$ è simmetrico

$X = (-1, 2)$ NON è simmetrico.

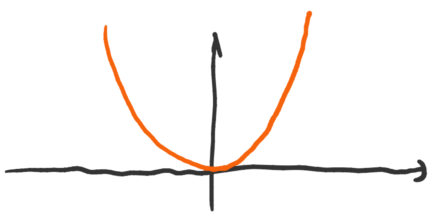
$X = (-1, 0) \cup (0, 1)$ è simmetrico

$X = [-2, 2)$ NON è simmetrico.

Def: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un insieme simmetrico e sia $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ (o $f: X \longrightarrow Y$, $Y \subseteq \mathbb{R}$). Si dice che f è PARI se $\forall x \in X$: $f(-x) = f(x)$.
Si dice che f è DISPARI se $\forall x \in X$: $f(-x) = -f(x)$.

ESEMPIO

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2$$

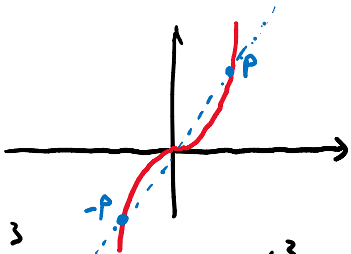


f è pari: $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

Ricordare: Il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse Y (cioè non cambia se lo ribaltiamo rispetto all'asse y)

ESEMPIO 2

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^3$$



$$f(-x) = (-x)^3 = ((-1)\cdot x)^3 = -1 \cdot x^3 = -x^3 = -f(x)$$

Ricordare: Il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine (cioè contiene l'opposto di ogni suo punto).

Nota: Ci sono funzioni che non sono né pari né dispari.

$f(x) = 2x - 3$, $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(-x) = 2(-x) - 3 = -2x - 3$

$f(x) = 2x - 3$

$-f(x) = -(2x-3) = -2x + 3$

f non è pari né dispari.

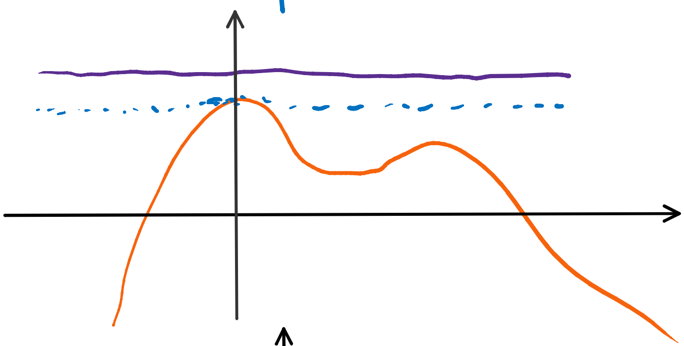
Funzioni limitate

Def: Sia $f: X \to Y$, $X \subseteq \mathbb{R}$, $Y \subseteq \mathbb{R}$ una funzione.

- Si dice che f è SUPERIORMENTE LIMITATA se $f(X)$ è un insieme superiormente limitato, cioè: $\exists\, M \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq M \quad \forall x \in X$.

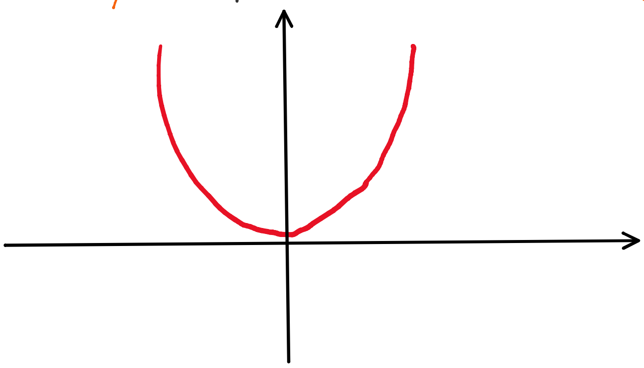
- Si dice che f è INFERIORMENTE LIMITATA se $f(X)$ è un insieme inferiormente limitato, cioè: $\exists\, m \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq m \quad \forall x \in X$.

- Si dice che f è LIMITATA se lo è sia superiormente che inferiormente.



superiormente limitata

(il grafico si trova al di sotto di una retta orizzontale)



inferiormente limitata

(il grafico si trova al di sopra di una retta orizzontale)

<u>Notazione</u>: Si definisce ESTREMO SUPERIORE DI f IN X la quantità $\sup_X f := \sup f(X)$ (indicato anche con $\sup_{x \in X} f(x)$)

Analogamente, si definisce ESTREMO INFERIORE DI f IN X la quantità $\inf_X f := \inf f(X)$

(indicato anche con $\inf_{x \in X} f(x)$)

<u>Convenzione</u>: Per le funzioni reali di variabile reale, spesso si indica solo l'espressione di $f(x)$ senza specificare dominio e codominio. In tal caso, si intende che:

- $Dom(f)$ è il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ in cui f è definita (DOMINIO NATURALE / CAMPO DI ESISTENZA)
- $Codom(f) = \mathbb{R}$.

ESEMPI

1) $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$

$$Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$$
$$= (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$Codom(f) = \mathbb{R}.$$

2) $f(x) = \sqrt{2x-3}$

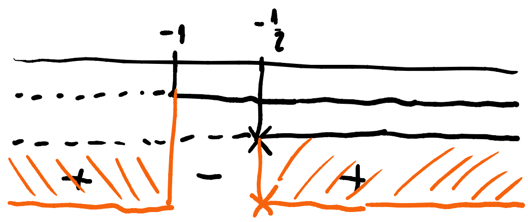
c.e: $\quad 2x - 3 \geq 0 \iff x \geq \dfrac{3}{2}$

$$Dom(f) = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$$

3) $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{x+1}{2x+1}}$

c.e: $\quad \dfrac{x+1}{2x+1} \geq 0$

$2x+1 \neq 0.$



$$Dom(f) = (-\infty, -1] \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

4) $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{\log x + 1}{2\log x + 1}}$

c.e.: $\begin{cases} \dfrac{\ln x + 1}{2\log x + 1} \geq 0 \\ x > 0 \\ 2\log x + 1 \neq 0 \end{cases}$

$t = \log x$

$\dfrac{t+1}{2t+1} \geq 0$

$t \leq -1 \quad \vee \quad t > -\frac{1}{2}$

$\log x \leq -1 \quad \vee \quad \log x > -\frac{1}{2}$

$x \leq e^{-1} \quad \vee \quad x > e^{-\frac{1}{2}}$

$$\begin{cases} x \leq e^{-1} \quad \vee \quad x > e^{-\frac{1}{2}} \\ x > 0 \end{cases}$$

$0 < x \leq e^{-1} \quad \vee \quad x > e^{-\frac{1}{2}}$

$\mathrm{Dom}(f) = (0, e^{-1}] \cup (e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$.

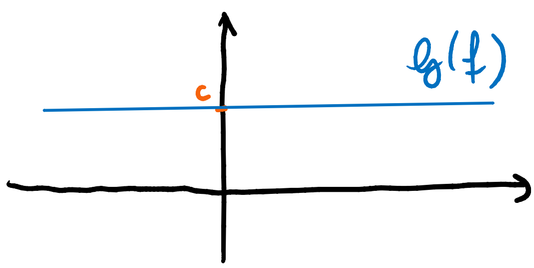
Principali condizioni per determinare i domini

1) Denominatori $\neq 0$
2) Argomenti delle radici di indice pari ≥ 0.
3) Argomento dei logaritmi > 0

FUNZIONI ELEMENTARI

1) FUNZIONI COSTANTI

$f(x) = c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$.



- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- $\mathrm{Im}(f) = \{c\}$
- Sono le uniche funzioni che sono sia crescenti che decrescenti. (non strettamente)
- Non sono iniettive.
  Non sono suriettive.

Il grafico è una retta orizzontale

- Sono pari
  $f(-x) = c = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

2) FUNZIONI AFFINI

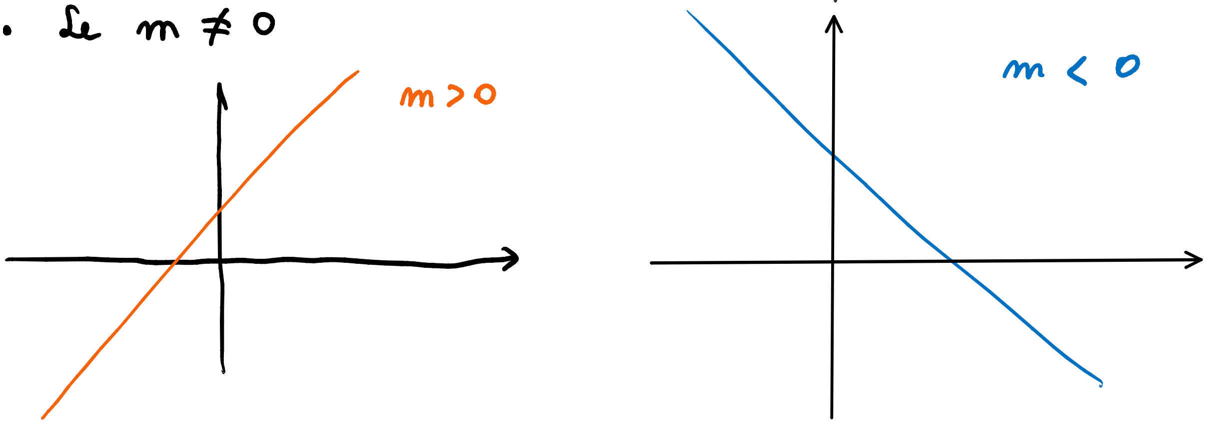
$$f(x) = mx + q \quad \text{con } m \in \mathbb{R},\ q \in \mathbb{R}.$$

Nota: se $q = 0$ si dicono funzioni lineari

m si dice COEFFICIENTE ANGOLARE

q si dice TERMINE NOTO

- Se $m = 0$, funzione costante $f(x) = q$
- Se $m \neq 0$



- Il grafico di una funzione affine è una retta e
  - m determina la pendenza della retta.
  - q determina il punto di intersezione con l'asse y.
- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$
- f è biettiva
- f è strett. monotona (crescente se $m > 0$, decrescente $m < 0$)
- Se $q = 0$, f è dispari
- Se $q \neq 0$ né pari né dispari.

Nota: f è biettiva quindi possiamo invertirla:

$$mx + q = y \iff x = \frac{y - q}{m} \iff x = \boxed{\frac{y}{m} - \frac{q}{m}} \quad f^{-1}(y)$$

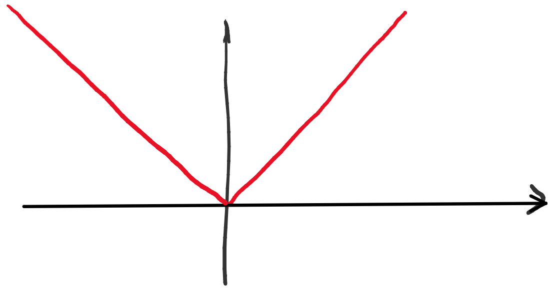
Possiamo dire che:

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{m} - \frac{q}{m}$$

---

3) VALORE ASSOLUTO

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$
- non è iniettiva né suriettiva

- f non è monotona (in $\mathbb{R}$) ma:
  è monotona strett. crescente in $[0, +\infty)$
  è monotona strett. decrescente in $(-\infty, 0]$

---

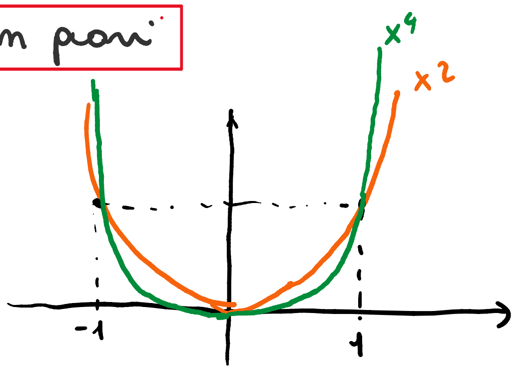
4) POTENZE NATURALI

$$f(x) = x^n \quad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

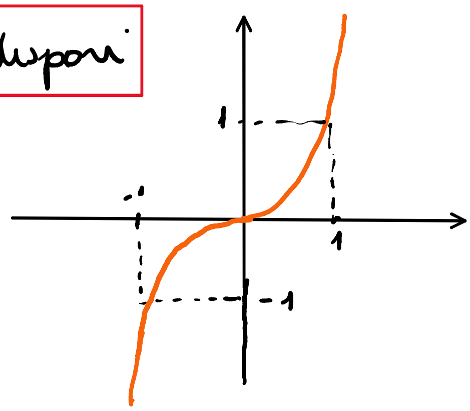
- $n = 0$: funzione costante 1
- $n = 1$: $f(x) = x$ funzione affine (lineare)

Ci interessa il caso $n \geq 2$:

$\boxed{n \text{ pari}}$



$\boxed{n \text{ dispari}}$



- $Dom(f) = \mathbb{R}$
- $Im(f) = [0, +\infty)$
- f non è iniettiva
- f non è monotona (ma lo è in $[0, +\infty)$ e in $(-\infty, 0]$)
- f è pari
- f non è biettiva quindi non è invertibile ma

$$f|_{[0,+\infty)} : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty), \quad x \longmapsto x^n$$

è biettiva e

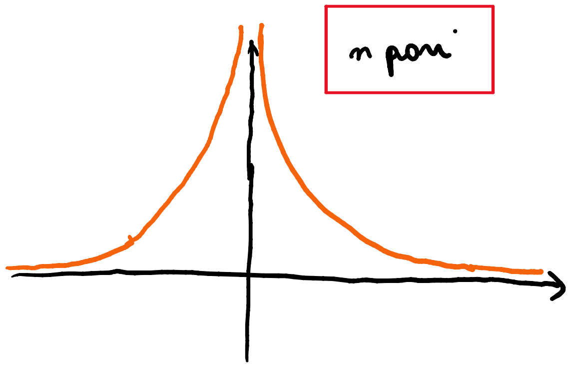
$$\left(f|_{[0,+\infty)}\right)^{-1} : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty), \quad x \longmapsto \sqrt[n]{x}$$

- $Dom(f) = \mathbb{R}$
- $Im(f) = \mathbb{R}$
- f è strettamente monotona crescente
- f è dispari
- f è biettiva e

$$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sqrt[n]{x}$$

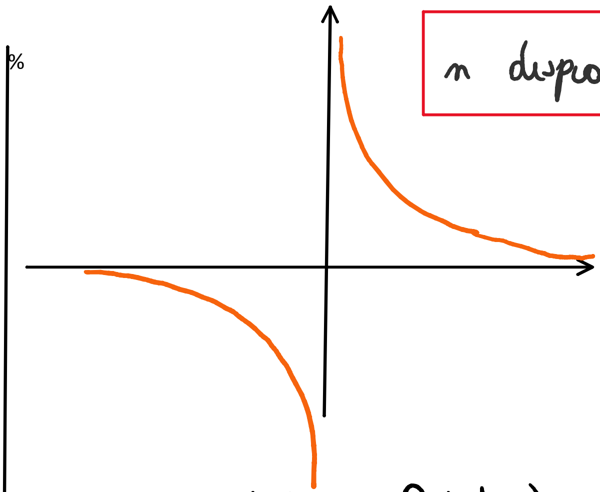
5) POTENZE INTERE NEGATIVE

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \text{con } n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$$



$\boxed{n \text{ pari}}$

- $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $Im(f) = (0, +\infty)$
- f è pari



$\boxed{n \text{ dispari}}$

- $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $Im(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- f è dispari

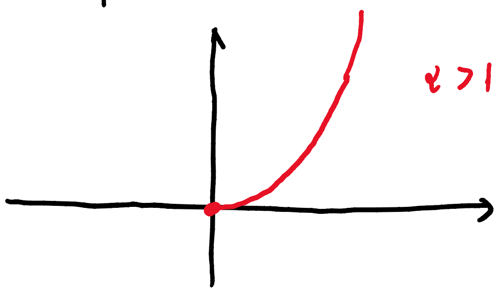
- non è monotona
- non è iniettiva né suriettiva

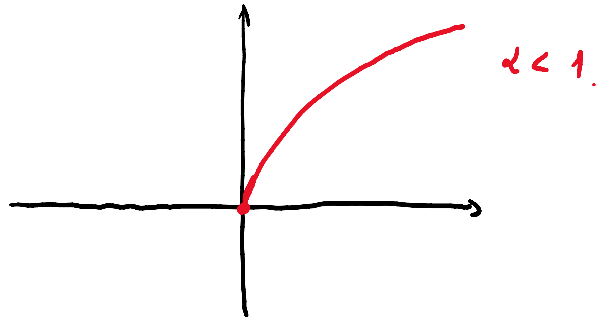
- non è monotona
- È iniettiva ma non suriettiva

---

6) POTENZE REALI POSITIVE

$f(x) = x^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\alpha > 0$.





In entrambi i casi:

- $Dom(f) = [0, +\infty)$
- $Im(f) = [0, +\infty)$
- f è strettamente monotona crescente.
- f è iniettiva
- Come funzione da $[0,+\infty)$ e $[0,+\infty)$ è biettiva e e $f^{-1} : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$, $x \longmapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} x^\alpha = y \\ x = y^{\frac{1}{\alpha}} \end{array}}$$

---

7) POTENZE REALI NEGATIVE

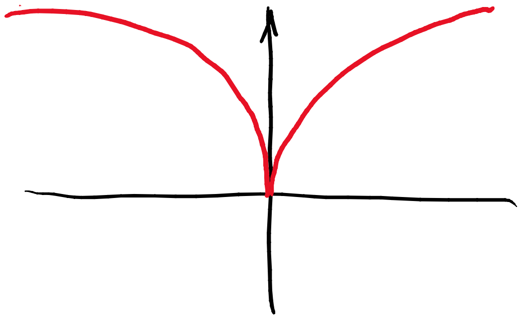
$f(x) = x^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\alpha < 0$.

- $Dom(f) = (0, +\infty)$
- $Im(f) = (0, +\infty)$
- f è strett. monotona decrescente.

· f è biettiva da $(0,+\infty)$ a $(0,+\infty)$ e
$f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{2}}$

Nota: Possiamo sfruttare i grafici delle potenze per disegnare anche il grafico di $f(x) = \sqrt[m]{x^n}$

ESEMPIO



$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

$Dom(f) = \mathbb{R}$

$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ se $x \geq 0$

f è pari perché $f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^2} = \sqrt[3]{x^2}$

Quindi il grafico per $x < 0$ si disegna ribaltando rispetto all'asse x il grafico di $x^{\frac{2}{3}}$

---

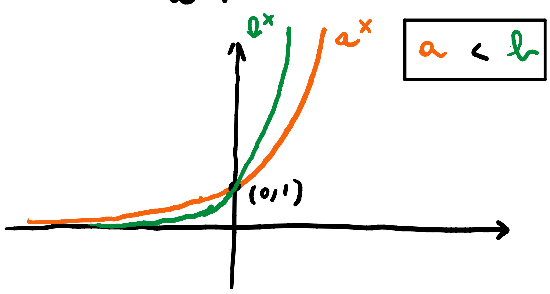
8) ESPONENZIALI

$f(x) = a^x$ con $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

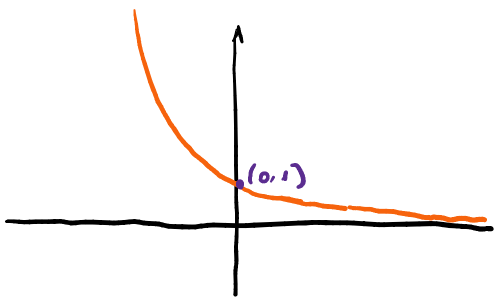
· Se $a = 1$, $f(x) = 1^x = 1$ (funzione costante)

· Se $a \neq 1$:

$a > 1$



$0 < a < 1$



· $Dom(f) = \mathbb{R}$

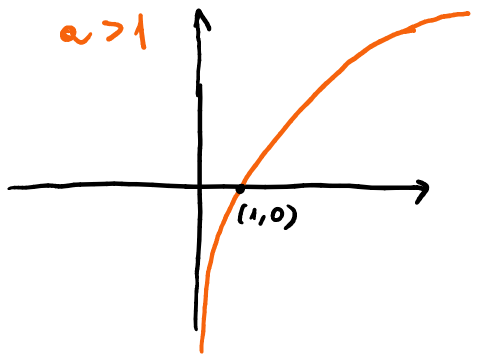
· $Im(f) = (0,+\infty)$

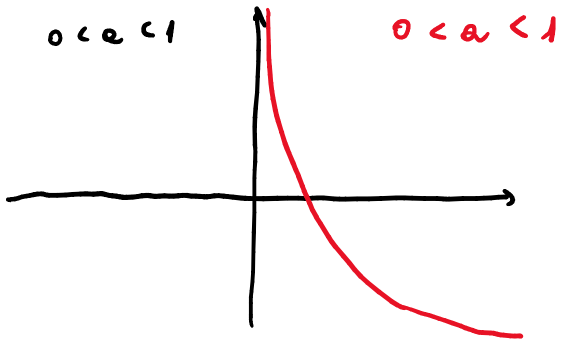
- f è strettamente monotona (crescente se $a>1$ e decrescente se $0<a<1$).
- Come funzione da $\mathbb{R}$ a $(0,+\infty)$ biettiva e $f^{-1}(x) = \log_a x$.

---

9) LOGARITMI

$f(x) = \log_a x$ con $a \in \mathbb{R}$, $a>0$, $a \neq 1$.

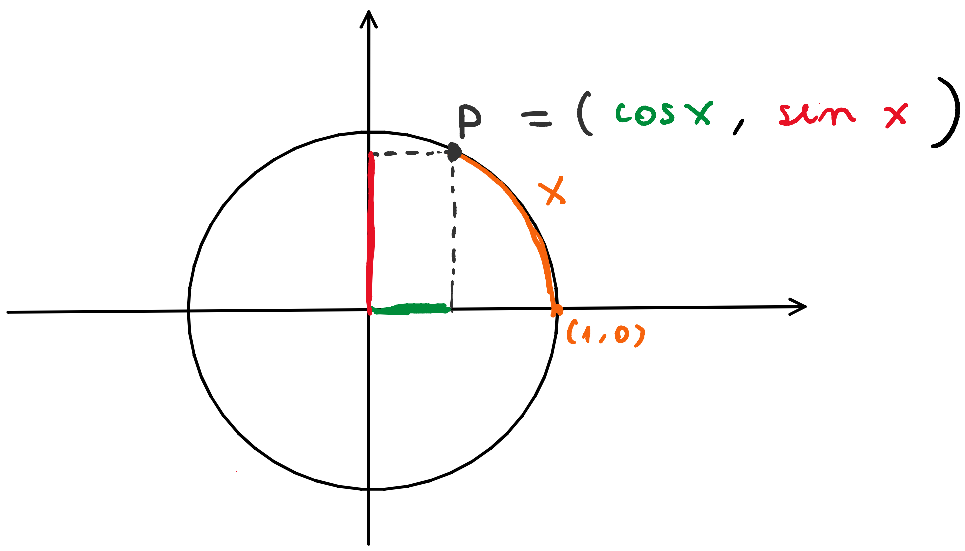




- $Dom(f) = (0,+\infty)$
- $Im(f) = \mathbb{R}$
- f è strett. monotona (crescente se $a>1$, decrescente se $0<a<1$)
- $f: (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ è biettiva se $f^{-1}(x) = a^x$.

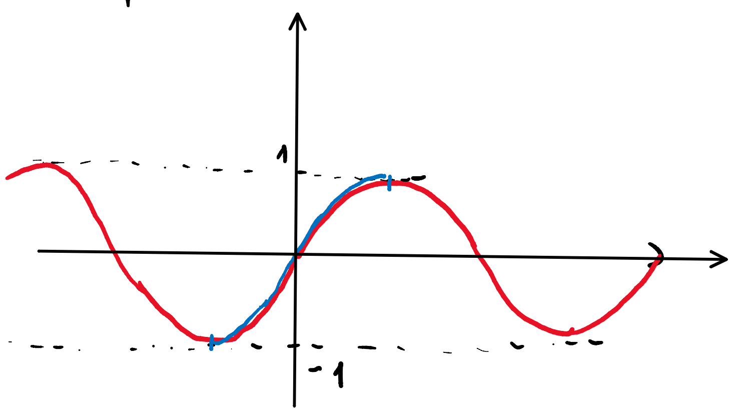
FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Nel piano cartesiano, consideriamo la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1. A partire dal punto $(1,0)$ prendiamo un arco di lunghezza pari ad x (girando in senso antiorario se $x>0$, e orario se $x<0$). Chiamiamo P il punto finale dell'arco. Le coordinate di P si dicono COSENO e SENO di x.



10) FUNZIONE SENO

$f(x) = \sin x$

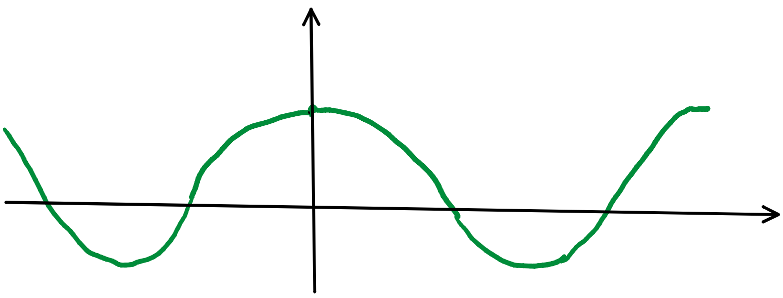


- $Dom(f) = \mathbb{R}$
- $Im(f) = [-1, 1]$
- f è dispari
- f è limitata e

$\sup_{\mathbb{R}} f = 1$, $\inf_{\mathbb{R}} f = -1$.

11) FUNZIONE COSENO

$f(x) = \cos x$



- $Dom(f) = \mathbb{R}$
- $Im(f) = [-1, 1]$
- f è pari
- f è limitata.

$\sup_{\mathbb{R}} f = 1$ e $\inf_{\mathbb{R}} f = -1$

Altre funzioni elementari (prossima lezione)

12) FUNZIONE TANGENTE $\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$

Inverse delle funzioni $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$

13) FUNZIONE ARCOSENO ($\arcsin x$)

14) FUNZIONE ARCOCOSENO ($\arccos x$)

15) FUNZIONE ARCOTANGENTE ($\arctan x$)