MATEMATICA - LEZIONE 8

venerdì 13 ottobre 2023 11:14

FUNZIONI

Def: Siano X e Y due insiemi non vuoti.
Una FUNZIONE di DOMINIO X e CODOMINIO Y è una legge che ad ogni elemento di X associa un (unico) elemento di Y.

Notazioni:

- $f: X \longrightarrow Y$ funzione di dominio X e codominio Y
- $X = \mathrm{Dom}(f)$ dominio di f
- $Y = \mathrm{Codom}(f)$ codominio di f
- Data $f: X \longrightarrow Y$, $\forall x \in X$ $\exists!$ $y \in Y$ che corrisponde ad x tramite f. Tale y si indica con $f(x)$ e si dice VALORE di f in x.
- Quando si vogliono specificare i valori di f.

$$f: X \longrightarrow Y \qquad \qquad f: X \longrightarrow Y,\ f(x) = \dots$$
$$\quad x \longmapsto f(x)$$

ESEMPIO

$X = \{$ studenti immatricolati UNIBA $\}$

$Y = \mathbb{N}$

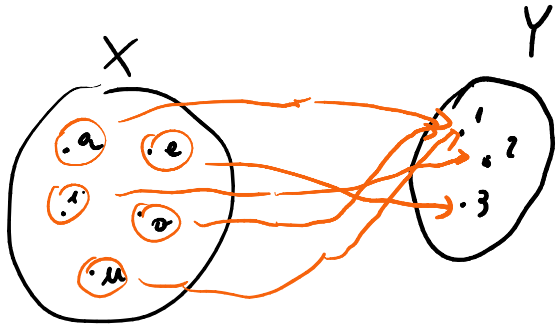
$$f: X \longrightarrow Y$$
$$x \longmapsto \text{n. di matricola di } x.$$

ESEMPIO 2

$X = \{a, e, i, o, u\}$

$Y = \{1, 2, 3\}$

$$f: \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ a & \longmapsto & 1 \\ e & \longmapsto & 3 \\ i & \longmapsto & 2 \\ o & \longmapsto & 1 \\ u & \longmapsto & 1 \end{array}$$



ESEMPIO 3

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

oppure: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

$f(2) = 2^2 = 4$
$f(-1) = (-1)^2 = 1$
$f(-3) = (-3)^2 = 9$

Def: Sia $f: X \to Y$ una funzione. Si definisce IMMAGINE di f l'insieme $f(X) = \{ f(x) \mid x \in X \}$ (su alcuni libri si indica con $\mathrm{Im}(f)$).

Più in generale, se $A \subseteq X$, si definisce IMMAGINE DI A TRAMITE f l'insieme:

$$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \}.$$

ESEMPIO

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

$f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$
$f([0,2]) = [0, 4]$

OSS

- $f(X) = \{ y \in Y \mid \exists\, x \in X \text{ t.c. } f(x) = y \}$
  In altri termini possiamo vedere $f(X)$ come l'insieme degli $y \in Y$ per cui l'equazione $f(x) = y$ ha almeno una soluzione in X.
- In modo simile:
  $f(A)$ è l'insieme degli $y \in Y$ per cui l'equazione $f(x) = y$ ha almeno una soluzione in A.

Def: Sia $f: X \longrightarrow Y$ una funzione. Si dice che:

- f è INIETTIVA (o INGETTIVA) se
  $\forall\, x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
  (Equivalentemente: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$)
- f è SURIETTIVA (o SURGETTIVA) se $f(X) = Y$
- f è BIETTIVA (o BIGETTIVA) se è sia iniettiva che suriettiva.

OSS

- f è iniettiva se $\forall\, y \in Y$, l'equazione $f(x) = y$ ha al più una soluzione in X
- f è suriettiva $\Longleftrightarrow$ $\forall\, y \in Y$ l'equazione $f(x) = y$ ha almeno una soluzione in X.
- f è biettiva $\Longleftrightarrow$ $\forall\, y \in Y$ l'equazione $f(x) = y$ ha esattamente una soluzione in X

ESEMPIO

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2$$

Non è iniettiva perché $f(-1) = f(1)$ ma $1 \neq -1$.
Non è suriettiva perché se $y \in \mathbb{R}$, $y < 0$ l'equazione $x^2 = y$ non ha soluzioni.

ESEMPIO 2

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty), \quad f(x) = x^2$$

- Non è iniettiva perché $f(-1) = f(1)$.
- È suriettiva perché $\forall y \in [0, +\infty)$ l'equazione $x^2 = y$ ha per soluzioni $\sqrt{y}$ e $-\sqrt{y}$.

ESEMPIO

$$f: [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$$
$$x \longmapsto x^2$$

Questa funzione è sia iniettiva che suriettiva (è biettiva).

Attenzione: le proprietà di una funzione dipendono non soltanto dalla sua espressione ma anche da dominio e codominio.

ESEMPIO 4

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^3$$

$\forall y \in \mathbb{R}$ l'equazione $x^3 = y$ ha per unica soluzione $\sqrt[3]{y}$. Questo ci dice che f è biettiva.

Def: Sia $f: X \longrightarrow Y$. Si definisce GRAFICO di f l'insieme $\mathcal{G}(f) = \{ (x, f(x)) \mid x \in X \}$

È un sottoinsieme di $X \times Y$

Def: Una FUNZIONE REALE DI VARIABILE REALE è una funzione $f: X \longrightarrow Y$ con $X, Y \subseteq \mathbb{R}$.

OSS Il grafico di una funzione reale di variabile reale è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$. Possiamo quindi rappresentarlo sul piano cartesiano:

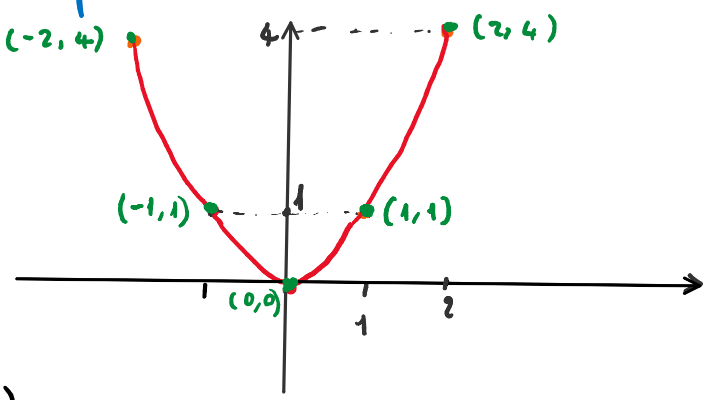
ESEMPIO

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^2$$

$f(1) = 1 \qquad (1,1) \in \mathcal{G}(f)$

$f(-1) = 1 \qquad (-1,1) \in \mathcal{G}(f)$

$f(0) = 0$



ESEMPIO 2

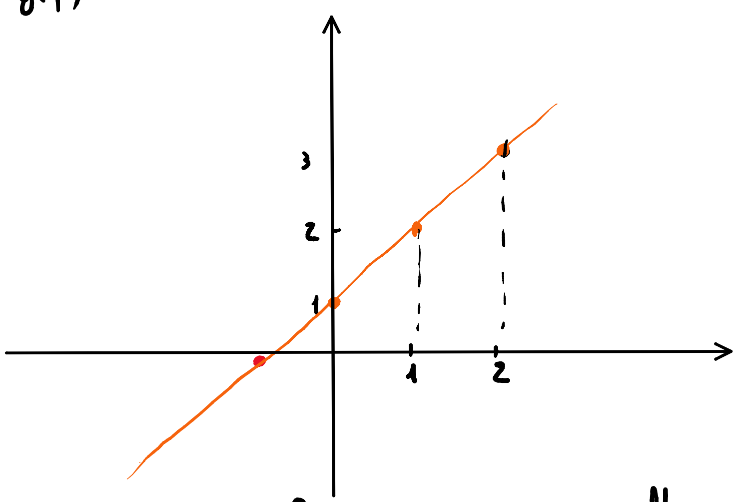
$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x+1$$

$f(0) = 1$

$f(1) = 2$

$f(-1) = 0$

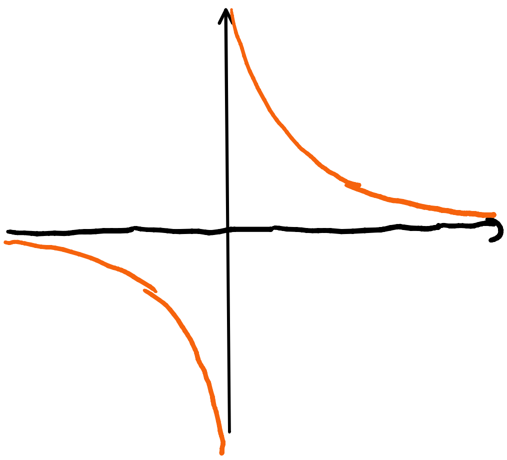
$f(2) = 3$



Il grafico è una retta

ESEMPIO 3

$$f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$



- Guardando il grafico è facile determinare l'immagine o capire se f è iniettiva / suriettiva.

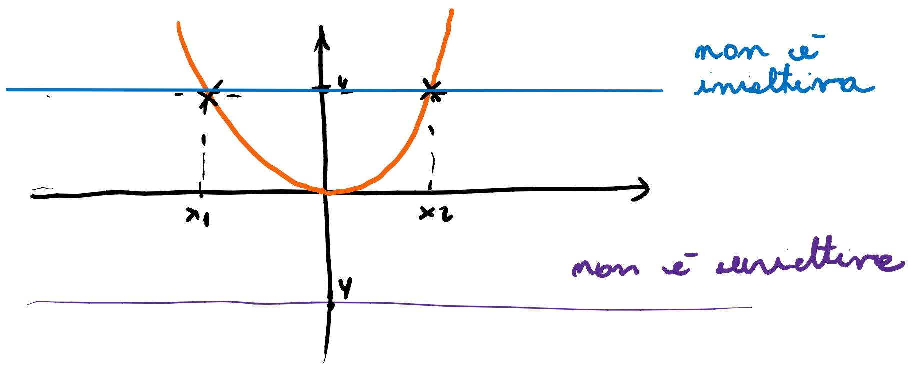
- $f(X)$ è l'insieme dei valori di Y per cui tracciando una retta orizzontale ad altezza y si interseca il grafico.

- f è iniettiva se $\forall\, y \in Y$, tracciando una retta orizzontale ad altezza y si interseca il grafico al massimo una volta

- f è suriettiva se $\forall\, y \in Y$, tracciando una retta oriz. ad altezza y si interseca il grafico.

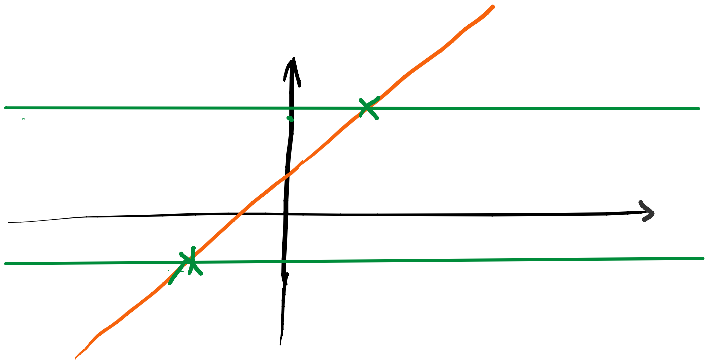
ESEMPI

1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow x^2$

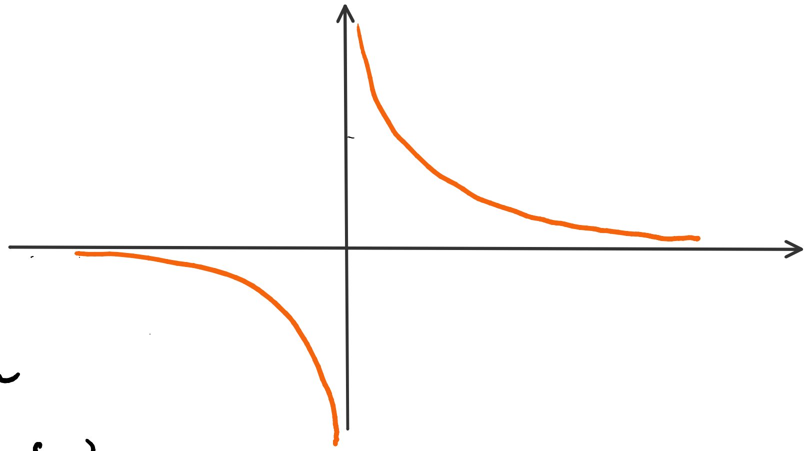


2) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad x \longmapsto x+1$

f è biettiva

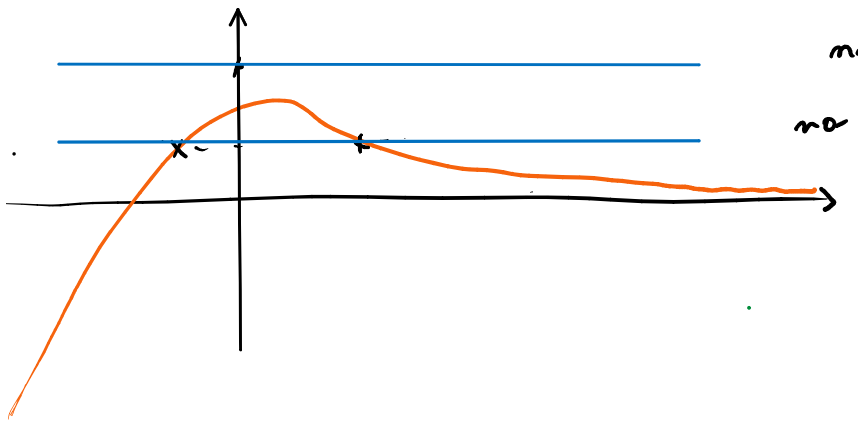


3) $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad x \longmapsto \frac{1}{x}$



f è iniettiva
f non è suriettiva
$f(\mathbb{R}\setminus\{0\}) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

4) Sia $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con il seguente grafico:



no suriettiva
no iniettiva

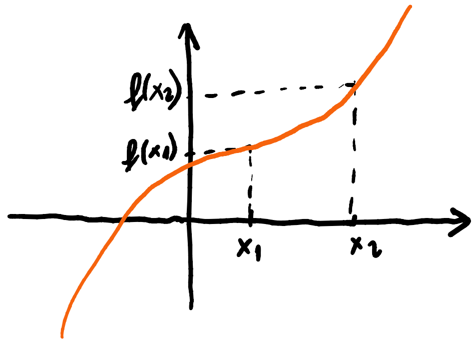
FUNZIONI MONOTONE

Def Sia $f: X \longrightarrow Y$ una funzione con $X, Y \subseteq \mathbb{R}$.

- Si dice che f è MONOTONA CRESCENTE se:
  $\forall x_1, x_2 \in X: \quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- Si dice che f è MONOTONA DECRESCENTE in X se
  $\forall x_1, x_2 \in X: \quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

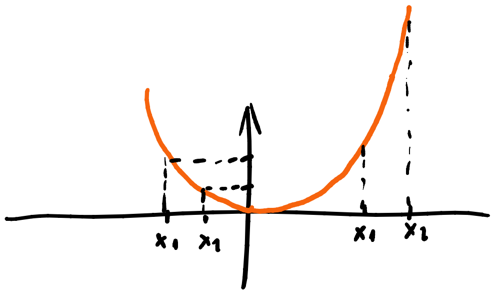
- Si dice che f è MONOTONA STRETTAMENTE CRESCENTE se $\forall x_1, x_2 \in X : \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

- Si dice che f è MONOTONA STRETTAMENTE DECRESCENTE se $\forall x_1, x_2 \in X : \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

- 

funzione monotona crescente e strettamente monotona crescente.

- $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longmapsto x^2$



non è monotona.

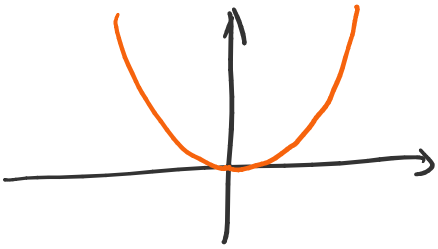
Def: Sia $f: X \to Y$ con $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ e sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che:

- f è MONOTONA CRESCENTE IN A se: $\forall x_1, x_2 \in A : \quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- f è MONOTONA DECRESCENTE IN A se: $\forall x_1, x_2 \in A : \quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- f è MONOTONA STRETTAMENTE CRESCENTE IN A se $\forall x_1, x_2 \in A : \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- f è MONOTONA STRETTAMENTE DECRESCENTE in A se $\forall x_1, x_2 \in A : \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

ESEMPIO

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2$

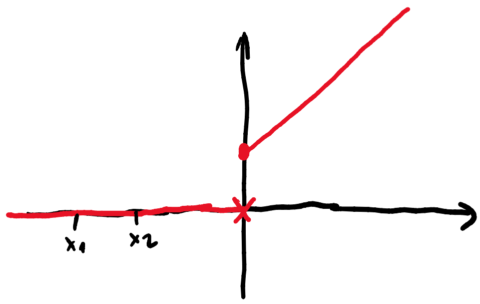


f è crescente in $[0, +\infty)$

f è decrescente in $(-\infty, 0]$

ESEMPI

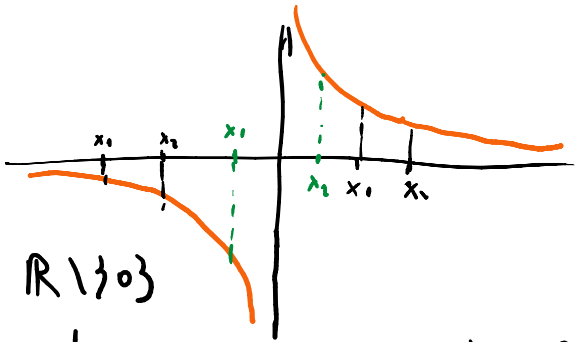
1) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x+1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$



- f è crescente ma non strettamente crescente.
- Si può dire che f è strettamente crescente in $[0, +\infty)$.

2) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \frac{1}{x}$



f non è monotona in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

ma è strettamente decrescente in $(0, +\infty)$ che in $(-\infty, 0)$.

OSS

Se $f: X \longrightarrow Y$ $(X, Y \subseteq \mathbb{R})$ è strettamente monotona allora è iniettiva.

COMPOSIZIONE DI FUNZIONI.

Siano $f: X \longrightarrow Y$ e $g: Y \longrightarrow Z$.

Si definisce **COMPOSIZIONE DI f E g** la funzione $g \circ f : X \longrightarrow Z$ definita da $g \circ f(x) = g(f(x))$

($g \circ f$ si legge g composto f)

> **Nota**: Per definire la composizione serve che $\mathrm{Dom}(g) = \mathrm{Codom}(f)$ oppure, più in generale, che $f(X) \subseteq \mathrm{Dom}(g)$.

ESEMPIO 1

$$f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\quad x \longmapsto \frac{1}{x} \qquad\qquad\quad x \longmapsto 3x^2+1$$

$$g \circ f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto g(f(x)) = 3f(x)^2+1 = 3\left(\frac{1}{x}\right)^2+1$$
$$= \frac{3}{x^2}+1$$

Attenzione: L'ordine in cui scriviamo f e g è importante.

Attenzione!

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\quad x \longmapsto 3x^2+1 \qquad\qquad x \longmapsto \frac{1}{x}$$

Per definire $f \circ g$ dobbiamo verificare se $g(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$g(\mathbb{R}) = [1, +\infty) \subseteq \mathbb{R}\setminus\{0\}$ OK

$$f \circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(g(x)) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{3x^2+1}$$

Quindi: $g \circ f \neq f \circ g$.

ESEMPIO:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto |x-3|+2$$

$$g: [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto \sqrt{x}$$

Chi è $g \circ f$?

Verifichiamo se $f(\mathbb{R}) \subseteq [0, +\infty)$?

$f(\mathbb{R}) = [2, +\infty) \subseteq [0, +\infty)$.

$$g \circ f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto g(f(x)) = g(|x-3|+2) = \sqrt{|x-3|+2}.$$

ESEMPIO

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto x+1$$

$$g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto \frac{1}{x}$$

$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \not\subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

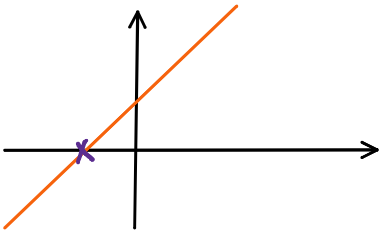
Per definire la composizione dobbiamo restringere il dominio di f.

$x + 1 = 0 \iff x = -1$.

$$f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto x+1$$

$$g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longrightarrow \frac{1}{x}$$

$f(\mathbb{R} \setminus \{-1\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



$$g \circ f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longrightarrow g(f(x)) = g(x+1) = \frac{1}{x+1}$$

FUNZIONE INVERSA

Def: Sia $f: X \to Y$ una funzione biettiva. Allora $\forall y \in Y \ \exists! \, x \in X$ t.c. $f(x) = y$. Si definisce FUNZIONE INVERSA DI f la funzione.

$$f^{-1}: Y \longrightarrow X$$
$$y \longmapsto \text{unico } x \text{ t.c. } f(x) = y.$$

ESEMPI

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 2x+1$$

$$2x+1 = y \iff 2x = y-1 \iff x = \frac{y-1}{2}$$

quindi f è biettiva e

$$f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$y \longmapsto \frac{y-1}{2}$$

ESEMPIO

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2$$

non è biettiva quindi non si può definire f^{-1}.

Ma

$$f: [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$$
$$x \longrightarrow x^2$$

è biettiva

Se $x, y \in [0,+\infty)$, allora

$$x^2 = y \iff \cancel{x = -\sqrt{y}} \vee x = \sqrt{y} \iff x = \sqrt{y}$$

Quindi

$$f: [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$$
$$x \longmapsto \sqrt{x}.$$

OSS Se $f: X \to Y$ è biettiva e $f^{-1}: Y \to X$ è la sua inversa, allora:

1) $f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in X$
2) $f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in Y$

TEOREMA (TEOREMA DI INVERTIBILITÀ DELLE FUNZIONI STRETTAMENTE MONOTONE)

Se $f: X \to Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ è strettamente monotona allora $f: X \to f(X)$ è biettiva e $f^{-1}: f(X) \to X$ è strettamente monotona (dello stesso tipo di f)

OSS Il grafico di f^{-1} si ottiene ribaltando il grafico di f rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante