Equazioni / Disequazioni razionali

Sono equazioni in cui l'incognita x compare all'interno di rapporti tra polinomi.

Si riconducono a equazioni del tipo $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$ con p e q polinomi

Come si risolvono ?

1) Condizioni di esistenza (c.e.): denominatori $\neq 0$.
2) Risolvere l'eq. (moltiplicando per i denominatori)
3) Controllare che le soluzioni trovate siano compatibili con le c.e.

ESEMPIO

$$\frac{x+1}{x^2-x} = \frac{2x}{x-1}$$

1) c.e. : $\begin{cases} x^2 - x \neq 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases}$ (cioè $x^2 - x \neq 0 \wedge x - 1 \neq 0$)

- $x - 1 \neq 0 \iff x \neq 1$
- $x^2 - x \neq 0 \iff x(x-1) \neq 0 \iff x \neq 0 \wedge x \neq 1$

c.e.: $\boxed{x \neq 1} \wedge x \neq 0$

2) $$\frac{x+1}{x^2-x} = \frac{2x}{x-1}$$

$$x + 1 = \frac{2x}{x-1} \cdot (x^2 - x)$$

$$x + 1 = \frac{2x}{\cancel{x-1}} x \cancel{(x-1)}$$

$$x + 1 = 2x^2 \qquad (0 = 2x^2 - x - 1)$$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$\Delta = 1 + 8 = 9 \qquad x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$

$\cancel{x = 1} \quad \vee \quad x = -\frac{1}{2}$

3) Conclusione: L'unica soluzione è $x = -\frac{1}{2}$

ESEMPIO 2

$$\frac{1}{6x^2-1} = 1$$

1) c.e: $\quad 6x^2 - 1 \neq 0 \iff x^2 \neq \frac{1}{6} \iff x \neq -\frac{1}{\sqrt{6}} \wedge x \neq \frac{1}{\sqrt{6}}$

2) $\frac{1}{6x^2-1} = 1 \iff 1 = 6x^2 - 1$

$\iff 6x^2 = 2$

$\iff x^2 = \frac{1}{3}$

$\iff x = \frac{1}{\sqrt{3}} \vee x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

3) Sia $\frac{1}{\sqrt{3}}$ che $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ soddisfano le c.e quindi le soluzioni sono: $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

ESEMPIO

$$\frac{x^4 - x^3 - 2x}{x^2 - x + 1} = 1 - x$$

1) c.e.: $\underbrace{x^2 - x + 1}_{\Delta = 1 - 4 = -3 < 0} \neq 0$ vera $\forall x \in \mathbb{R}$.

2) $\frac{x^4 - x^3 - 2x}{x^2 - x + 1} = 1 - x$

$x^4 - x^3 - 2x = (1 - x)(x^2 - x + 1)$

$$x^4 - \cancel{x^3} - \cancel{2}x = x^2 - \cancel{x} + 1 - \cancel{x^3} + x^2 - \cancel{x}$$

$$x^4 = 2x^2 + 1$$

$$x^4 - 2x^2 - 1 = 0$$

Sostituzione: $t = x^2$

$$t^2 - 2t - 1 = 0$$

$$\Delta = 4 + 4 = 8$$

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 \cdot 2}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \frac{\cancel{2}(1 \pm \sqrt{2})}{\cancel{2}}$$

$$= 1 \pm \sqrt{2}$$

$$t = 1 + \sqrt{2} \quad \vee \quad t = 1 - \sqrt{2}$$

$$x^2 = 1 + \sqrt{2} \quad \vee \quad x^2 = \underbrace{1 - \sqrt{2}}_{<0} \quad (\text{impossibile})$$

$$x = \pm\sqrt{1 + \sqrt{2}}$$

Soluzioni: $x = \sqrt{1+\sqrt{2}} \quad \vee \quad x = -\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

Disequazioni razionali

Sono disequazioni in cui l' incognita x compare all'interno di rapporti tra polinomi.

Si riconducono a disequazioni del tipo

$$\frac{p(x)}{q(x)} \geq 0 \;/\; \frac{p(x)}{q(x)} \leq 0 \;/\; \frac{p(x)}{q(x)} > 0 \;/\; \frac{p(x)}{q(x)} < 0$$

1) Condizioni di esistenza
(A volte, per disequazioni semplici del tipo $\frac{p(x)}{q(x)} \geq 0$, questo passaggio può essere fatto insieme ai passaggi seguenti)

2) Si riconduce la disequazione a una della forma

$$\frac{p(x)}{q(x)} \geq 0 \;/\; \frac{p(x)}{q(x)} \leq 0 \;/\; \frac{p(x)}{q(x)} > 0 \;/\; \frac{p(x)}{q(x)} < 0$$

3) Si studia il segno della frazione $\frac{p(x)}{q(x)}$.

4) Si scrive l'insieme delle soluzioni tenendo conto dei passaggi precedenti.

ESEMPIO

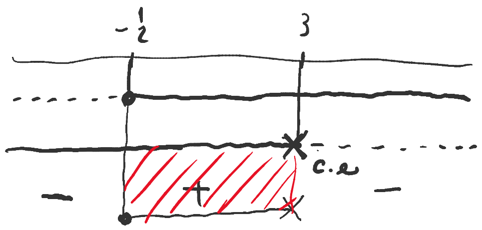
$$\frac{2x+1}{3-x} \geq 0$$

1) c.e. $3-x \neq 0 \iff x \neq 3$

2) Non serve, la disequazione è già nella forma $\frac{p(x)}{q(x)} \geq 0$.

3) Studio del segno:

- $2x+1 \geq 0 \iff x \geq -\frac{1}{2}$
- $3-x \geq 0 \iff x \leq 3$



4) Soluzioni: $-\frac{1}{2} \leq x < 3$.

ESEMPIO

$$\frac{x+2}{x} > x+1$$

1) c.e. $x \neq 0$

2) $\frac{x+2}{x} - (x+1) > 0$

$$\frac{(x+2)-x(x+1)}{x} > 0$$

$$\frac{\cancel{x}+2-x^2-\cancel{x}}{x} > 0$$

$$\frac{2-x^2}{x} > 0$$

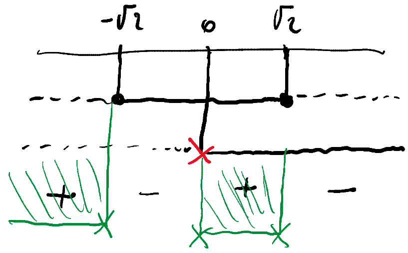
3) Studio del segno

- $2 - x^2 \geq 0$

$2 - x^2 = 0 \iff x^2 = 2 \iff x = \pm\sqrt{2}$

$2 - x^2 \geq 0 \iff -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

- $x > 0$



4) Soluzioni: $x < -\sqrt{2} \quad \vee \quad 0 < x < \sqrt{2}$

Sistemi di disequazioni

$$\begin{cases} \text{disequazione ①} \\ \text{disequazione ②} \\ \vdots \end{cases}$$

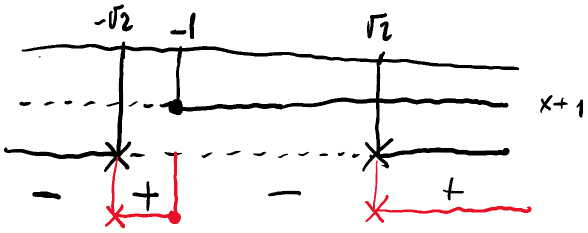
Si risolvono le singole disequazioni e si fa l'intersezione delle soluzioni trovate.

ESEMPIO

$$\begin{cases} 2x - 3 \leq 0 & ① \\ \dfrac{x+1}{x^2-2} \geq 0 & ② \end{cases}$$

① $2x - 3 \leq 0 \iff x \leq \frac{3}{2}$

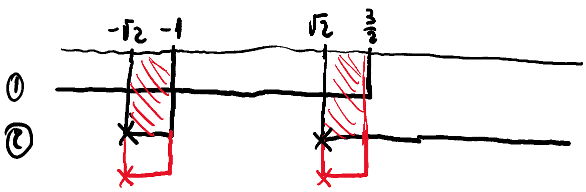
② $\dfrac{x+1}{x^2-2} \geq 0$



Soluzioni di ②: $-\sqrt{2} < x \leq -1 \quad \vee \quad x > \sqrt{2}$

$$\begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ -\sqrt{2} < x \leq -1 \quad \vee \quad x > \sqrt{2} \end{cases}$$

Intersezione delle soluzioni:



Attenzione, non confondere questo passaggio con lo studio del segno

Soluzioni del sistema: $-\sqrt{2} < x \leq -1 \quad \vee \quad \sqrt{2} < x \leq \frac{3}{2}$

Sistemi con una equazione e una disequazione

$$\begin{cases} \text{equazione} \\ \text{disequazione} \end{cases}$$

Si trovano le soluzioni dell'eq. e si verifica se soddisfano la disequazione

ESEMPIO

$$\begin{cases} x^2 + 4x - 5 = 0 & ① \\ x^2 - 1 > 0 & ② \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$

① $$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+5}}{1} = -2 \pm 3 = \begin{cases} -5 \\ 1 \end{cases}$$

Il sistema diventa

$$\begin{cases} \cancel{x = 1} \vee x = -5 \quad ✓ \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases}$$

Soluzione del sistema: $x = -5$

Equazioni e disequazioni con valore assoluto

ESEMPIO

$$|2x+1| = 3x - 1$$

Definizione di valore assoluto: $|2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } 2x+1 \geq 0 \\ -(2x+1) & \text{se } 2x+1 < 0 \end{cases}$

L'equazione è equivalente a:

$$\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 2x+1 = 3x-1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 2x+1 < 0 \\ -(2x+1) = 3x-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 2 = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x = 2 \end{cases}$$

$x = 2$

$$\begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ -2x \cancel{-1} = 3x \cancel{-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ 5x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ \cancel{x = 0} \end{cases} \quad (\text{impossibile})$$

Quindi $x = 2$ è l'unica soluzione dell'equazione iniziale

In generale:

$$|a(x)| = b(x)$$

è equivalente a:

$$\begin{cases} a(x) \geq 0 \\ a(x) = b(x) \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) < 0 \\ -a(x) = b(x) \end{cases}$$

ESEMPIO

$$|x^2 - 4| = 2x + 1$$

$$\boxed{|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x^2 - 4 \geq 0 \\ -(x^2 - 4) & \text{se } x^2 - 4 < 0 \end{cases}}$$

$$(1) \begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x^2 - 4 = 2x + 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ -(x^2 - 4) = 2x + 1 \end{cases} (2)$$

$$(1) \begin{cases} x \geq 2 \vee x \leq -2 \\ x^2 - 2x - 5 = 0 \longrightarrow x = 1 \pm \sqrt{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \vee x \leq -2 \\ \underbrace{x = 1 + \sqrt{6}}_{SI} \vee x = \underbrace{1 - \sqrt{6}}_{NO} \end{cases}$$

Unica soluzione di (1) è $1 + \sqrt{6}$

② $\begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ -(x^2-4) = 2x+1 \end{cases}$

$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ -x^2 + 4 = 2x + 1 \end{cases}$

$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \quad x = -1 \pm \sqrt{1+3} \; \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$

$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x = 1 \;\; \vee \;\; \cancel{x = -3} \end{cases}$

$\checkmark$

L'unica soluzione di ② è $x = 1$

Conclusione: Le soluzioni dell'eq. di partenza sono

$x = 1 + \sqrt{6} \quad \vee \quad x = 1$

In modo simile si risolvono le disequazioni con valore assoluto

ESEMPIO

$x - |2x - 3| \geq 1.$

Per definizione: $\quad |2x-3| = \begin{cases} 2x - 3 & \text{se } 2x - 3 \geq 0 \\ -(2x-3) & \text{se } 2x - 3 < 0 \end{cases}$

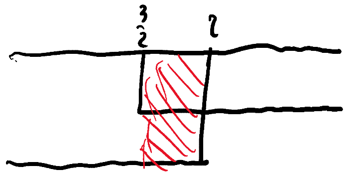
La disequazione è equivalente a:

① $\begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ x - (2x-3) \geq 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ x - (-(2x-3)) \geq 1 \end{cases}$ ②

① $\begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x - 2x + 3 \geq 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x \ge \frac{3}{2} \\ -x \ge -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge \frac{3}{2} \\ x \le 2 \end{cases}$$



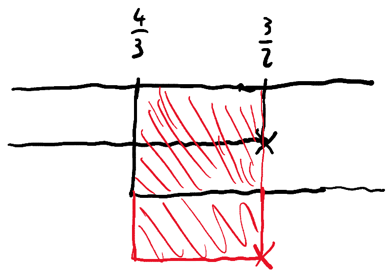
① : $\frac{3}{2} \le x \le 2$

② $\begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ x - (-(2x-3)) \ge 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x + 2x - 3 \ge 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ 3x \ge 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x \ge \frac{4}{3} \end{cases}$$



Soluzioni di ② : $\frac{4}{3} \le x < \frac{3}{2}$.

Conclusione: le soluzioni della disequazione di partenza sono $\frac{3}{2} \le x \le 2 \quad \vee \quad \frac{4}{3} \le x < \frac{3}{2}$

cioè $\frac{4}{3} \le x \le 2$.

Altro metodo per risolvere alcune disequazioni

- $|a(x)| \leq b(x) \iff \begin{cases} a(x) \leq b(x) \\ a(x) \geq -b(x) \end{cases}$

- $|a(x)| \geq b(x) \iff a(x) \geq b(x) \ \vee \ a(x) \leq -b(x)$

ESEMPIO

$$x - |2x-3| \geq 1$$

$$x-1 \geq |2x-3|$$

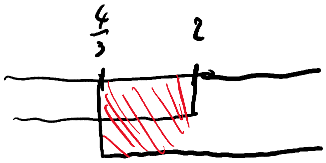
$$|2x-3| \leq x-1$$

$$\begin{cases} 2x-3 \leq x-1 \\ 2x-3 \geq -(x-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ 2x-3 \geq -x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ 3x \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq \frac{4}{3} \end{cases}$$



$$\frac{4}{3} \leq x \leq 2 .$$

ESERCIZIO DI ESAME

$$\frac{|3x-2| - 1}{x^2-3} \leq 0$$

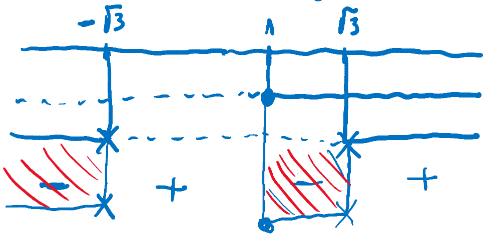
I metodo: usiamo la definizione di valore assoluto

$$|3x-2| = \begin{cases} 3x-2 & \text{se } 3x-2 \geq 0 \\ -(3x-2) & \text{se } 3x-2 < 0 \end{cases}$$

$$① \begin{cases} 3x-2 \geq 0 \\ \dfrac{3x-2-1}{x^2-3} \leq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 3x-2 < 0 \\ \dfrac{-(3x-2)-1}{x^2-3} \leq 0 \end{cases} ②$$

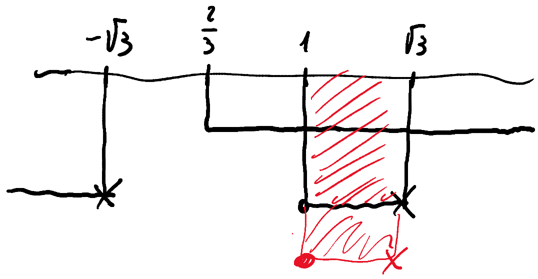
① $\begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ \frac{3x-3}{x^2-3} \leq 0 \end{cases}$

Studio del segno:



$x < -\sqrt{3} \quad \vee \quad 1 \leq x < \sqrt{3}$

$\begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x < -\sqrt{3} \quad \vee \quad 1 \leq x < \sqrt{3} \end{cases}$



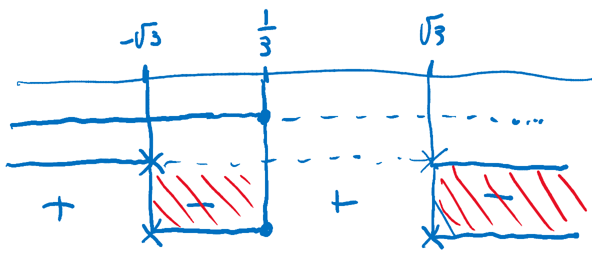
$1 \leq x < \sqrt{3}$

Soluzioni di ① : $1 \leq x < \sqrt{3}$

② $\begin{cases} 3x - 2 < 0 \\ \frac{-(3x-2) - 1}{x^2 - 3} \leq 0 \end{cases}$

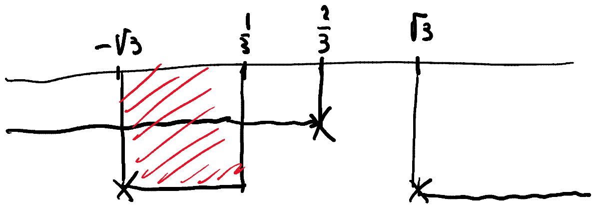
$\begin{cases} x < \frac{2}{3} \\ \frac{-3x + 2 - 1}{x^2 - 3} \leq 0 \end{cases}$

$\frac{1 - 3x}{x^2 - 3} \leq 0$



$-\sqrt{2} < x \leq \frac{1}{3} \quad \vee \quad x > \sqrt{3}$

$\begin{cases} x < \frac{2}{3} \\ -\sqrt{3} < x \leq \frac{1}{3} \quad \vee \quad x > \sqrt{3} \end{cases}$



$$-\sqrt{3} < x \leq \frac{1}{3}$$

Conclusione: $-\sqrt{3} < x \leq \frac{1}{3} \quad \vee \quad 1 \leq x < \sqrt{3}$.

<u>II metodo</u>

$$\frac{|3x-2|-1}{x^2-3} \leq 0$$

Fare direttamente lo studio del segno

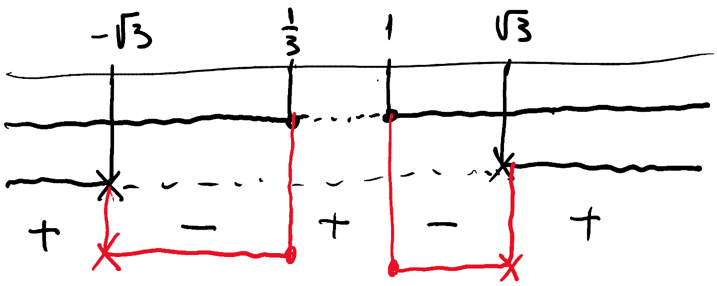
- $|3x-2|-1 \geq 0 \iff |3x-2| \geq 1$

$$\iff 3x-2 \geq 1 \quad \vee \quad 3x-2 \leq -1$$

$$\iff 3x \geq 3 \quad \vee \quad 3x \leq 1$$

$$\iff x \geq 1 \quad \vee \quad x \leq \frac{1}{3}$$

- $x^2-3 \geq 0 \iff x \geq \sqrt{3} \quad \vee \quad x \leq -\sqrt{3}$



$$-\sqrt{3} < x \leq \frac{1}{3} \quad \vee \quad 1 \leq x < \sqrt{3}$$