

Limiti e continuità per funzioni di più variabili

Definizione Siano $f: X \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in Df(X)$ (ovvero x_0 è punto di accumulazione di X) e $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Diciamo che il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 è l e scriviamo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ se

$\forall V \subseteq \mathbb{R}$ intorno di $l \quad \exists U \subseteq \mathbb{R}^m$ intorno di x_0 tale che $\forall x \in U \cap (X \setminus \{x_0\}) : f(x) \in V$
 $\Leftrightarrow \forall V \subseteq \mathbb{R}$ intorno di $l \quad \exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in X \setminus \{x_0\} : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow f(x) \in V$

Osservazione La definizione precedente è formalmente identica a quella che abbiamo visto per funzioni reali di una singola variabile reale, ciò che è stato necessario definire in $\mathbb{R}^m$ è stata una opportuna definizione di intorno di $x_0 \in \mathbb{R}^m$ (abbiamo utilizzato gli insiemi aperti, che a loro volta sono stati definiti tramite le palle aperte rispetto alla metrica euclidea in $\mathbb{R}^m$)

Osservazione Possiamo riscrivere la definizione precedente considerando separatamente i tre casi $l \in \mathbb{R}$, $l = +\infty$ ed $l = -\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in X \setminus \{x_0\} : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty &\Leftrightarrow \forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in X \setminus \{x_0\} : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow f(x) > M \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty &\Leftrightarrow \forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in X \setminus \{x_0\} : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow f(x) < -M \end{aligned}$$

Analogamente a quanto visto nel caso unidimensionale, introduciamo la definizione di continuità

Definizione Siano $f: X \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$. Diciamo che f è **CONTINUA** in x_0 se

- $x_0 \notin Df(X)$, cioè se x_0 è un punto isolato, oppure
- $x_0 \in Df(X)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Le due condizioni precedenti si possono riscrivere come segue

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in X : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Osservazioni Tutti i teoremi sulle operazioni tra limiti e tra funzioni continue che abbiamo visto nel caso di funzioni reali di una singola variabile reale continuano ad essere validi anche per funzioni reali di più variabili reali. Inoltre continuiamo a valere i teoremi di permanenza del segno, di prolungamento delle disuguaglianze, delle convergenze obbligate e del confronto (a patto di modificare le nazioni di "definitivamente per $x \rightarrow x_0$ " usando gli intorni sferici centrati in x_0)

Per una funzione vettoriale $f: X \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ possiamo definire analogamente il concetto di limite

Definizione Siano $f: X \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione vettoriale, $x_0 \in Df(X)$ e $l \in \mathbb{R}^m$.

Diciamo che il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 è l e scriviamo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ se

$$\begin{aligned} \forall V \subseteq \mathbb{R}^m \text{ intorno di } l \quad \exists U \subseteq \mathbb{R}^m \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che } \forall x \in U \cap (X \setminus \{x_0\}) : f(x) \in V \\ \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in X \setminus \{x_0\} : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon \end{aligned}$$

norma in $\mathbb{R}^m$ norma in $\mathbb{R}^m$

Proposizione Siano $f: X \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \text{Int}(X)$ e $l = (l_1, \dots, l_m) \in \mathbb{R}^m$.

Supponiamo che $f = (f_1, \dots, f_m)$, cioè $f_1, \dots, f_m: X \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ sono le componenti di f . Sono equivalenti:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$
- $\forall j \in \{1, \dots, m\} : \lim_{x \rightarrow x_0} f_j(x) = l_j$

Corollario Sia $f = (f_1, \dots, f_m): X \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $x_0 \in X$.

Allora f è continua in $x_0 \Leftrightarrow \forall j \in \{1, \dots, m\} : f_j$ è continua in x_0

Conclusione: per studiare i limiti e/o la continuità di una funzione vettoriale è sufficiente studiare i limiti e/o la continuità delle sue componenti (che sono funzioni scalari)

Osservazione Siano $f: X \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{Int}(X)$ e $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Consideriamo $v \in \mathbb{R}^m$, $v \neq (0, \dots, 0)$

L'insieme $\{x_0 + tv : t \in \mathbb{R}\}$ è la retta in $\mathbb{R}^m$ per x_0 e parallela a v

L'insieme $\{x_0 + tv : t \in [a, b]\}$ è un segmento sulla retta per x_0 e parallelo a v

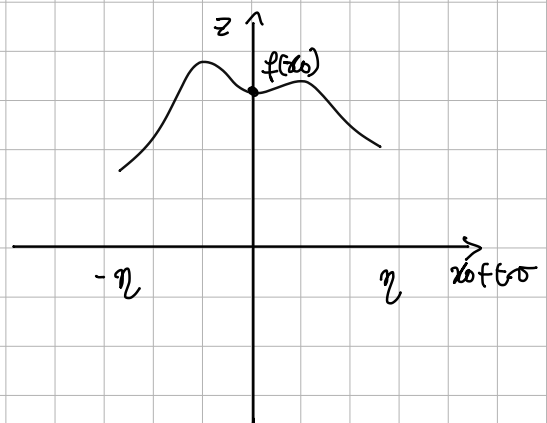
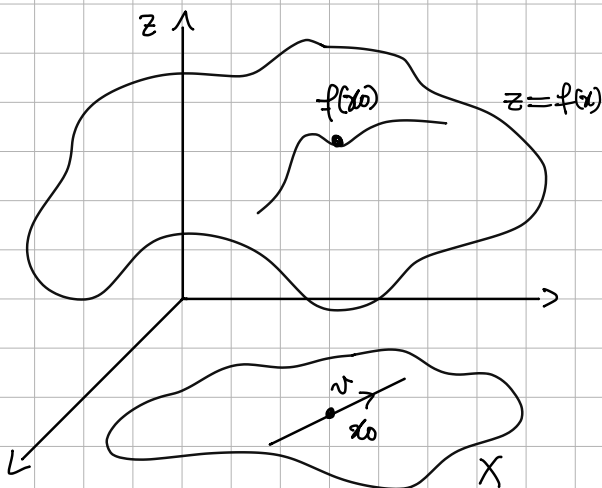
Poiché $x_0 \in \text{Int}(X) \quad \exists \eta > 0$ tale che $\{x_0 + tv : t \in [-\eta, \eta]\} \subseteq X$

Possiamo dunque considerare la composizione

$$t \in [-\eta, \eta] \mapsto x_0 + tv \in X \subseteq \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} f(x_0 + tv) \in \mathbb{R}$$

deniamo questa funzione con $\varphi_{x_0, v}$

$\varphi_{x_0, v}(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_0 + tv)$ è una funzione reale di variabili reali che descrive il comportamento della funzione di variabili reali f su un segmento centrato in x_0 e parallelo a v



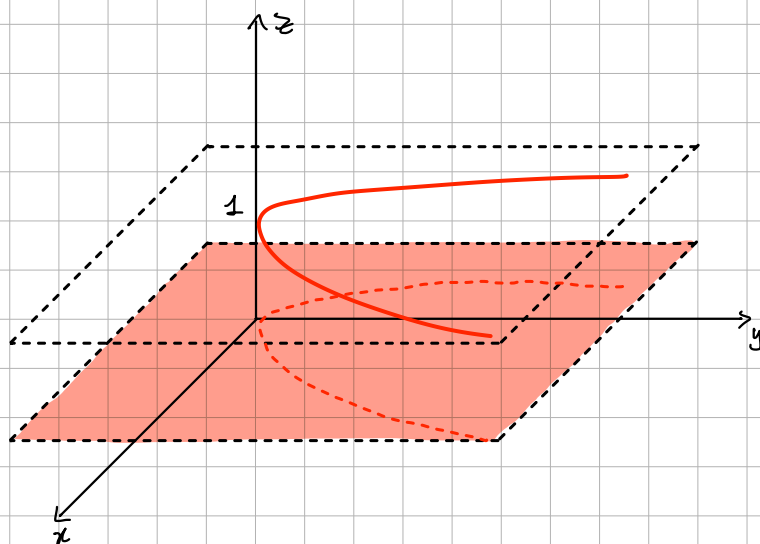
Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ allora $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_{x_0, v}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + tv) = l \quad \forall v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$

ATTENZIONE: non vale il viceversa!

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + tv) = l \quad \forall v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \not\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Abbiamo infatti il seguente controesempio

$$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{se } y = x^2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Ripetiamo adesso gli enunciati del teorema di Weierstrass e del teorema dei valori intermedi nel caso di funzioni di più variabili. Ricordiamo che nel caso unidimensionale sono fondamentali le ipotesi sul dominio della funzione, più precisamente

ipotesi del teorema di Weierstrass: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua

ipotesi del teorema dei valori intermedi: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo

Prima di enunciare la versione multidimensionale di questi teoremi dobbiamo dunque introdurre due tipologie di insiemi di $\mathbb{R}^m$ che generalizzano gli intervalli chiusi e limitati (per il teorema di Weierstrass) e gli intervalli (per il teorema dei valori intermedi)

Definizione $X \subseteq \mathbb{R}^m$ si dice **LIMITATO** se è contenuto in una palla centrata nell'origine, ovvero se $\exists R > 0$ tale che $X \subseteq B_R(0) \Leftrightarrow \forall x \in X: \|x\| < R$

Definizione $X \subseteq \mathbb{R}^m$ si dice **COMPATTO** se è chiuso e limitato

Esempi

- $\overline{B_r(x_0)} = \{x \in \mathbb{R}^m: \|x - x_0\| \leq r\}$ è compatto
- $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^m: \|x - x_0\| < r\}$ è limitato ma non è chiuso
- $\mathbb{R}^m - B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^m: \|x - x_0\| \geq r\}$ è chiuso ma non è limitato

Teorema di Weierstrass

Siano $X \subseteq \mathbb{R}^m$ compatto e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ continua

Allora f è dotata di massimo e minimo su X , ovvero

$\exists x_1, x_2 \in X$ tale che $\forall x \in X: f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$

Definizione Usando le stesse notazioni del teorema precedente, diciamo che

$f(x_1) = \min_{x \in X} f(x) = \min \{f(x): x \in X\}$ è il **MINIMO ASSOLUTO** di f in X

$f(x_2) = \max_{x \in X} f(x) = \max \{f(x): x \in X\}$ è il **MASSIMO ASSOLUTO** di f in X

x_1 è **PUNTO di MINIMO ASSOLUTO** di f in X

x_2 è **PUNTO di MASSIMO ASSOLUTO** di f in X

Osservazioni:

- $\{f(x) : x \in X\} = f(X) \subseteq \mathbb{R}$ quindi sappiamo cosa significa massimo e minimo per $f(X)$
- Il risultato precedente vale anche per $m=1$, pertanto possiamo ridotare le ipotesi del teorema di Weierstrass visto durante questo corso, considerando funzioni definite su sottoinsiemi chiusi e limitati di $\mathbb{R}$ (in altri termini non è necessario nelle ipotesi del teorema di Weierstrass che il dominio sia un intervallo ma è sufficiente che sia chiuso e limitato, ovvero compatto)

Definizioni

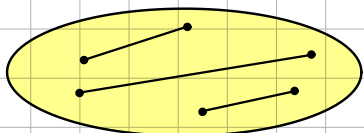
- Siano $x, y \in \mathbb{R}^m$, $x \neq y$
L'insieme $[x, y] \stackrel{\text{def}}{=} \{x + t(y-x) : t \in [0, 1]\}$ si chiama **SEGMENTO** di estremi x e y
- Siano $x_0, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^m$ tali che $\forall j \in \{1, \dots, k\} : x_{j-1} \neq x_j$
L'insieme $\bigcup_{j=1}^k [x_{j-1}, x_j]$ si chiama **POLIGONALE** di vertici $x_0, x_1, \dots, x_k$
I punti x_0 e x_k si dicono **ESTREMI** della poligonale
- Diciamo che $X \subseteq \mathbb{R}^m$ è un insieme **CONNESSO per POLIGONALI** se
 $\forall x, y \in X, x \neq y \quad \exists$ una poligonale di estremi x, y completamente contenuta in X
- Diciamo che $X \subseteq \mathbb{R}^m$ è un insieme **CONNESSO** se
 $\forall x, y \in X, x \neq y : [x, y] \subseteq X$

Osservazione Poiché i segmenti sono un caso particolare di poligonali, vale la seguente implicazione per $X \subseteq \mathbb{R}^m$

$$X \text{ connesso} \Rightarrow X \text{ connesso per poligonali}$$

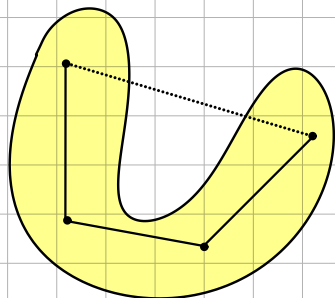
Esempi

1)



insieme connesso

2)

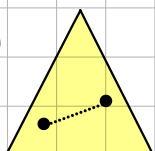


insieme connesso per poligonali ma non connesso

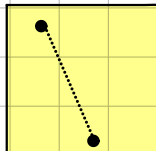
3) $B_r(x_0)$ è un insieme connesso

4) Il semipiano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ è un insieme connesso

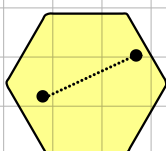
5)



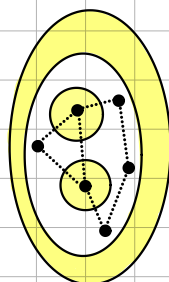
connesso



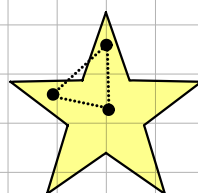
connesso



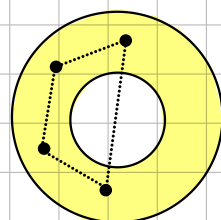
connesso



non connesso
per poligonali



connesso per
poligonali



connesso per
poligonali

Teorema del valore intermedio:

Siano $X \subseteq \mathbb{R}^m$ un insieme non vuoto connesso per poligomoli

$f: X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua

Allora f assume tutti i valori compresi tra l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f su X , ovvero definiti

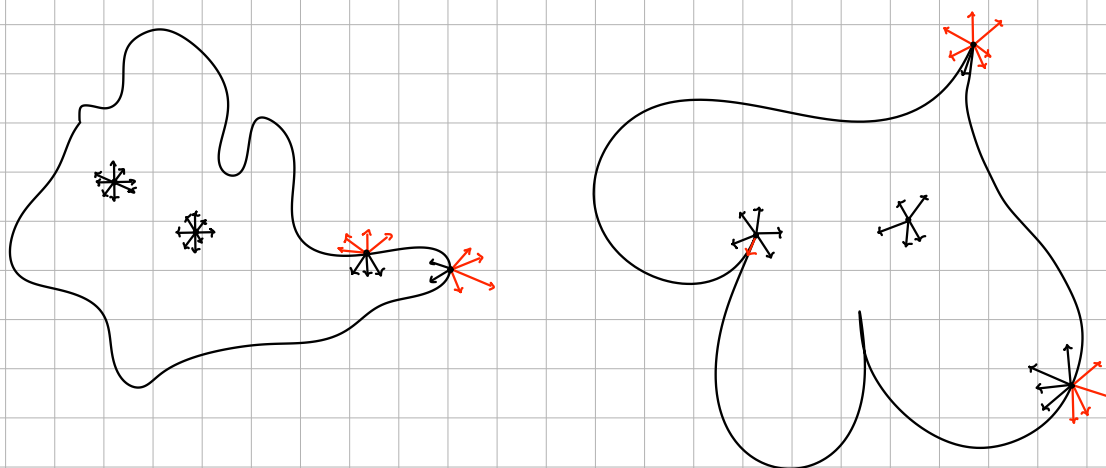
$$m \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{f(x) : x \in X\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{f(x) : x \in X\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

risulta che $\forall y \in (m, M) \exists x \in X$ tale che $f(x) = y$

DERIVATE PARZIALI

Introduciamo adesso il concetto di derivata direzionale per una funzione scalare di più variabili reali. Consideriamo per semplicità solamente un punto $x_0 \in \text{Int}(X)$ in modo che per qualsiasi direzione non nulla esista sempre un segmento centrato in x_0 tutto contenuto in X .



Le direzioni in nero sono quelle lungo le quali si possono calcolare i rapporti incrementali: quelle in rosso sono quelle lungo le quali non è invece possibile, se prendiamo punti interni non ci sono direzioni "proibite", se prendiamo punti sul bordo non tutte le direzioni sono ammissibili.

Definizione Siano $f: X \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{Int}(X)$ e $v \in \mathbb{R}^m$, $v \neq 0$

Se la funzione reale di variabili reali $\varphi_{x_0, v}(t) = f(x_0 + tv)$ è derivabile in $t=0$ ovvero se

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_{x_0, v}(h) - \varphi_{x_0, v}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h}$$

allora diciamo che f ammette **DERIVATA DIREZIONALE** in x_0 nella direzione v e scriviamo

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h}$$

Altre notazioni per la derivata direzionale di f in x_0 nella direzione v

$$\frac{\partial}{\partial v} f(x_0), D_v f(x_0), \partial_v f(x_0), f_v(x_0)$$

Definizione Siano $f: X \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{Int}(X)$, $i \in \{1, \dots, m\}$

la derivata direzionale di f in x_0 rispetto alla direzione e_i (i -esimo vettore della base canonica) si dice **DERIVATA PARZIALE** di f in x_0 rispetto alla variabile x_i e si denota con uno dei seguenti simboli

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0), \quad \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_0), \quad f_{x_i}(x_0), \quad \partial_{x_i} f(x_0), \quad \partial_i f(x_0), \quad D_{x_i} f(x_0), \quad D_i f(x_0)$$

$$\begin{aligned} \text{Quindi} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h e_i) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0^1, \dots, x_0^i + h, \dots, x_0^m) - f(x_0^1, \dots, x_0^m)}{h} \end{aligned}$$

dove $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^m)$

Un'altro fenomeno, quando calcoliamo la derivata parziale di f rispetto ad x_i stiamo facendo la derivata rispetto ad x_i trattando le altre variabili $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m$ come delle "costanti".

Esempi:

$$\begin{aligned} 1) \quad f(x, y, z) &= y + x^2 + z^4 & f: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= 2x, & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= 1, & \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= 4z^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad f(x, y) &= x^2 y + 2x \cos y & f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2xy + 2 \cos y & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x^2 - 2x \sin y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad f(x, y) &= xy e^{x^2 + 3y^2} & f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y (e^{x^2 + 3y^2} + x e^{x^2 + 3y^2} \cdot 2x) = (1 + 2x^2) y e^{x^2 + 3y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x (e^{x^2 + 3y^2} + 6y^2 e^{x^2 + 3y^2}) = x(1 + 6y^2) e^{x^2 + 3y^2} \end{aligned}$$

Definizione Siano $f: X \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \text{Int}(X)$

Si dice che f è **DERIVABILE** in x_0 se esistono tutte le derivate parziali: $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0)$

In tal caso si chiama **GRADIENTE** di f in x_0 il seguente vettore

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0) \right) \in \mathbb{R}^m$$

che si denota con uno dei simboli:

$$\nabla f(x_0), \quad \text{grad } f(x_0), \quad Df(x_0)$$

NB: il simbolo ∇ si legge "NABLA"

Esempi:

$$\begin{aligned} 1) \quad f(x, y, z) &= (2x - y + z^2)^2 & f: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= 2(2x - y + z^2) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(2x) = 4(2x - y + z^2) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= -2(2x - y + z^2) & \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= 4z(2x - y + z^2) \end{aligned}$$

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right) = \underbrace{(2x - y + z^2)}_{\text{scalare}} \cdot \underbrace{(4, -2, 4z)}_{\text{vettore}}$$

$$2) \quad f(x) = \|x\|^2 \quad f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

Riscriviamo f esplicitando la dipendenza dalle variabili

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^m x_j^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 2x_j \quad \forall j=1, \dots, m \quad \Rightarrow \quad \nabla f(x_1, \dots, x_m) = (2x_1, \dots, 2x_m) = 2(x_1, \dots, x_m)$$

$$\text{ovvero } \nabla \|x\|^2 = 2x$$

Osservazione Sia $X \subseteq \mathbb{R}^m$ insieme aperto e non vuoto

Supponiamo che la funzione $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ sia derivabile in X , cioè

$\forall x \in X$: f è derivabile in x

Allora le funzioni derivate parziali

$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} : X \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni scalari di m -variabili reali

$\nabla f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ è un campo vettoriale

Osservazione Come nel caso unidimensionale, esistono funzioni non derivabili.

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{dom}(f) = \mathbb{R}^2$$

Per $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Proviamo che f non è derivabile parzialmente sia rispetto ad x che rispetto ad y in $(0, 0)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} \nexists \Rightarrow \nexists \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} \nexists \Rightarrow \nexists \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$$

Osservazione Siano $X \subseteq \mathbb{R}^m$ insieme aperto e non vuoto e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$

Se $m \geq 2$ allora f derivabile $\nRightarrow f$ continua

Mostriamo un controesempio

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Facciamo vedere che f è derivabile in 0

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0, \text{ analogamente } \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Quindi f è derivabile in $(0, 0)$ e $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$

Proviamo che f non è continua in $(0, 0)$

Se per assurdo f fosse continua in $(0, 0)$, avremmo $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0$

Un particolare, la restrizione di f sulla retta $y = x$ sarebbe continua, ma

$$f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow 0 \quad \text{assurdo!}$$

Pertanto f non è continua in $(0, 0)$

Definizione Siano $f: X \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \text{Int}(X)$

Si dice che f è **DIFFERENZIABILE** in x_0 se

- f è derivabile in x_0 , cioè $\exists \nabla f(x_0)$
- $$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - \nabla f(x_0) \cdot h}{\|h\|} = 0$$

NB: Nel limite precedente

$h = (h_1, \dots, h_m) \in \mathbb{R}^m$, $\|h\| = \left(\sum_{j=1}^m h_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ è la norma di h

$\nabla f(x_0) \cdot h = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \cdot h_j$ è il prodotto scalare tra $\nabla f(x_0)$ e h