

Notazioni elementari di ALGEBRA LINEARE

Sia $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$

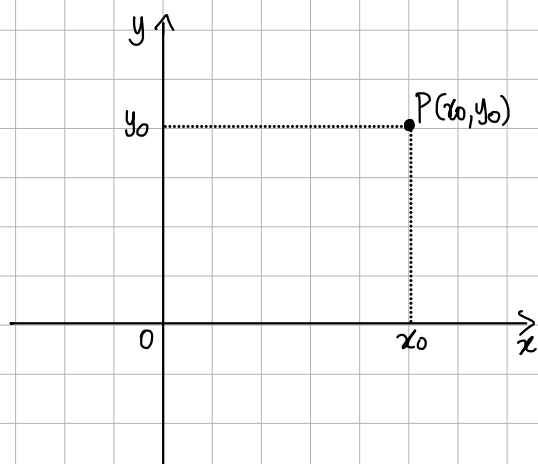
$$\mathbb{R}^m := \{ (x_1, \dots, x_m) : x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R} \} \quad \text{SPAZIO EUCLIDEO } m\text{-DIMENSIONALE}$$

Esempi:

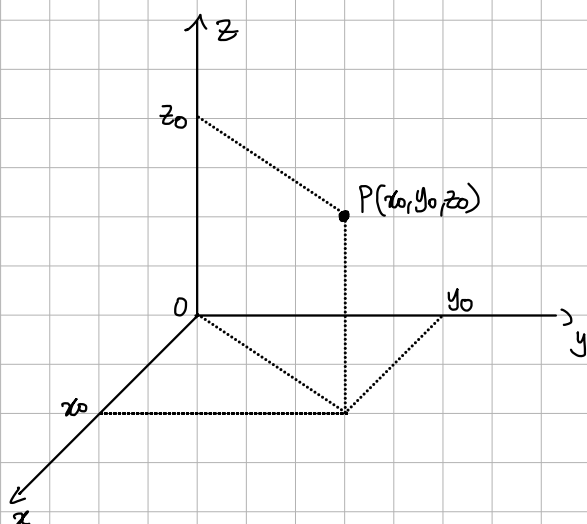
$$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R} \quad \text{RETTA REALE}$$

$$\mathbb{R}^2 = \{ (x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \} \quad \text{PIANO EUCLIDEO}$$

$$\mathbb{R}^3 = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \} \quad \text{SPAZIO EUCLIDEO TRIDIMENSIONALE (spazio fisico)}$$



Nel piano euclideo ogni punto è individuato univocamente da due coordinate cartesiane: al posto di (x_1, x_2) si usa spesso la notazione (x, y)



Nello spazio euclideo tridimensionale ogni punto è individuato univocamente da tre coordinate cartesiane, al posto di (x_1, x_2, x_3) usiamo la notazione (x, y, z)

Notazioni

Souviene $x \in \mathbb{R}^n$ per dire che x è una n -ple di numeri reali, ovvero $x = (x_1, \dots, x_n)$
↑
COMPONENTI di x

Nei libri di testo si possono trovare anche le seguenti notazioni:

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \quad \text{oppure} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

└────────── VETTORE COLONNA

OPERAZIONI in $\mathbb{R}^n$

ADDIZIONE

$$x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$$

MOLTIPLICAZIONE per un NUMERO REALE

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda \text{ si dice "scalare"})$$

$$\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$\mathbb{R}^n$ munito delle operazioni precedenti (addizione e moltiplicazione per uno scalare) è uno SPAZIO VETTORIALE ovvero verifica le seguenti proprietà:

$$(G_1) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n: x + (y + z) = (x + y) + z$$

(la somma è associativa)

$$(G_2) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n: x + y = y + x$$

(la somma è commutativa)

$$(G_3) \quad \exists 0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } \forall x \in \mathbb{R}^n: x + 0 = x$$

(esiste lo zero di $\mathbb{R}^n$)

$$(G_4) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \exists -x := (-1)x \in \mathbb{R}^n \text{ tale che } x + (-x) = 0$$

(esistenza dell'opposto)

$$(V_1) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n: \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$$

$$(V_2) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n: (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$$

$$(V_3) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n: (\lambda \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$$

$$(V_4) \quad \exists 1 \in \mathbb{R} \text{ tale che } \forall x \in \mathbb{R}^n: 1 \cdot x = x$$

In questo modo chiamiamo gli elementi di $\mathbb{R}^n$ VETTORI

Definizione Consideriamo i seguenti vettori di $\mathbb{R}^n$

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$$

$$e_2 = (0, 1, \dots, 0)$$

⋮

$$e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

Così e_j è la n -ple aventi tutti le componenti nulle tranne la j -esima che vale 1
 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ si chiama **BASE CANONICA** di $\mathbb{R}^n$

Osservazione Ogni vettore $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ si scrive in maniera unica come

$$x = \sum_{j=1}^m x_j e_j = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \dots + x_m \cdot e_m$$
 questa circostanza si esprime dicendo che x si scrive univocamente come
COMBINAZIONE LINEARE dei vettori della base canonica mediante i coefficienti $x_1, \dots, x_m$

Notazioni In $\mathbb{R}^3$ (spazio fisico) invece di e_1, e_2, e_3 i vettori della base canonica si denotano

$$\vec{i} = (1, 0, 0), \quad \vec{j} = (0, 1, 0), \quad \vec{k} = (0, 0, 1)$$

In particolare in $\mathbb{R}^3 \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

PRODOTTO SCALARE

Se $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m, y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^m x_j y_j = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_m y_m \in \mathbb{R} \quad (\text{prodotto scalare tra } x \text{ e } y)$$

NB: 1) Il prodotto scalare è un numero reale!

2) Il prodotto scalare $x \cdot y$ si denota anche con $(x, y), \langle x, y \rangle$

Il prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$ verifica le seguenti proprietà:

(B1) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n : (x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

(B2) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n : x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

(B3) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}^n : (\lambda x) \cdot y = \lambda (x \cdot y) = x \cdot (\lambda y)$

(Q1) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : x \cdot y = y \cdot x$

(Q2) $\forall x \in \mathbb{R}^n : x \cdot x \geq 0$

(Q3) $\forall x \in \mathbb{R}^n : x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Le proprietà (B1)-(Q3) ci dicono che • individua una FORMA QUADRATICA DEFINITA POSITIVA (introduciamo nel seguito la nozione generale di forma quadratica) e pertanto $\mathbb{R}^n$ munito di tale prodotto scalare è lo SPAZIO EUCLIDEO n-DIMENSIONALE

NORMA / MODULO

Se $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\| := \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Si chiama modulo (o norma) di x e rappresenta la lunghezza del vettore x (oppure la distanza del punto x dall'origine)

La norma verifica le seguenti proprietà:

(N1) $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \geq 0$

(N2) $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(N3) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

(N4) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

(N5) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : |x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

DISUGUAGLIANZA di CAUCHY-SCHWARZ

Definizioni

- $x, y \in \mathbb{R}^n$ si dicono ORTOGONALI $x \cdot y = 0$
- $u \in \mathbb{R}^n$ si dice VERSORE $\|u\| = 1$

Osservazione I vettori della base canonica sono versori ($\forall j \in \{1, \dots, n\} : \|e_j\| = 1$)

e $\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : i \neq j \Rightarrow e_i \cdot e_j = 0$

Le due proprietà precedenti si riassumono dicendo che $\{e_1, \dots, e_n\}$ è una BASE ORTONORMALE di $\mathbb{R}^n$.

MATRICI

Definizione Siano $m, n \in \mathbb{N}$ tali che $m, n \geq 1$

Una MATRICE $m \times n$ è una tabella di $m \cdot n$ numeri (reali) con m righe e n colonne

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

a_{ij} denota l'elemento di posto (i, j) della matrice A (si usa anche la notazione a_{ij}^i)
 i denota l'indice di riga, j denota l'indice di colonna

Se $m = n$ (cioè se il numero di righe è uguale al numero di colonne)
la matrice A si dice QUADRATA

Esempi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & 3 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ è una matrice } 2 \times 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ è una matrice quadrata } 2 \times 2$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \\ -1 & 12 \end{pmatrix} \text{ è una matrice } 3 \times 2$$

OPERAZIONI fra MATRICI

ADDIZIONE

Due matrici con lo stesso numero di righe e di colonne si possono sommare
componente per componente

Se $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ allora $A+B := (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$

MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE REALE

Possiamo moltiplicare una matrice per un numero reale, moltiplicando componenti per componenti gli elementi della matrice per lo scalare

$$\text{Se } \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \text{ allora } \lambda A := (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Esempi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

PRODOTTO TRA MATRICI

Possiamo moltiplicare la matrice A e B se e soltanto se il numero di **colonne** di A è uguale al **numero di righe** di B (ovvero se ogni riga di A ha tanti elementi quanti quelli di ogni colonna di B), in tal caso la matrice $A \cdot B$ ha lo stesso **numero di righe di A** e lo stesso **numero di colonne di B** e l'elemento di posto (i,j) di $A \cdot B$ si ottiene facendo il prodotto scalare della i -esima riga di A per la j -esima colonna di B .

$$\text{In simboli, se } A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \text{ matrice } m \times n$$

$$B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \text{ matrice } n \times p$$

$$\text{allora } A \cdot B \text{ è una matrice } m \times p \quad A \cdot B = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}}$$

$$c_{ij} = \underbrace{(a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in})}_{i\text{-esima riga di } A} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} \rightarrow j\text{-esima colonna di } B$$

$$= a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Vista la definizione precedente, il prodotto tra matrici è anche detto **PRODOTTO RIGHE PER COLONNE**

$$\text{Esempio} \quad \text{Consideriamo la matrice quadrata } 2 \times 2 \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \leftarrow \text{matrice } 2 \times 1$$

↑
matrice quadrata 2×2

↑
vettore colonna / matrice 2×1

$$b_1 = (a_{11} \ a_{12}) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_{11} x_1 + a_{12} x_2$$

$$b_2 = (a_{21} \ a_{22}) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_{21} x_1 + a_{22} x_2$$

$$\text{concludiamo che } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo ora

$$\begin{array}{ccc} (y_1 \ y_2) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & = & (y_1 \ y_2) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{pmatrix} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{"vettore riga"} & & \text{il prodotto tra matrici} \\ \text{matrice } 1 \times 2 & & \text{è ASSOCIATIVO (ma non} \\ & & \text{commutativo in generale)} \end{array}$$

Il prodotto di una matrice 1×2 con una matrice 2×1 è una matrice 1×1 che identifichiamo con un numero reale, pertanto

$$(y_1 \ y_2) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{pmatrix} = y_1 (a_{11} x_1 + a_{12} x_2) + y_2 (a_{21} x_1 + a_{22} x_2)$$

$$= a_{11} y_1 x_1 + a_{12} y_1 x_2 + a_{21} y_2 x_1 + a_{22} y_2 x_2 = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} y_i x_j$$

La funzione $b_A: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(y, x) \mapsto (y_1 \ y_2) \cdot A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = y^T A x$$

Si chiama FORMA BILINEARE associata alla matrice A

Quando $x=y$ otteniamo la cosiddetta FORMA QUADRATICA associata ad A

Definizione (FORMA QUADRATICA associata ad una MATRICE QUADRATA)

Sia $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}$ una matrice quadrata $m \times m$

Supponiamo che A sia SIMMETRICA, ovvero che $\forall i, j \in \{1, \dots, m\} : a_{ij} = a_{ji}$

Si chiama FORMA QUADRATICA associata ad A la funzione

$$q_A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}^m: q_A(x) := x^T A x = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} x_i x_j$$

Introduciamo le seguenti definizioni per la matrice A , sulle basi del segno della forma quadratica associata q_A

- A si dice DEFINITA POSITIVA se $\forall x \in \mathbb{R}^m, x \neq 0: q_A(x) > 0$
- A si dice DEFINITA NEGATIVA se $\forall x \in \mathbb{R}^m, x \neq 0: q_A(x) < 0$
- A si dice SEMIDEFINITA POSITIVA se $\forall x \in \mathbb{R}^m: q_A(x) \geq 0$
- A si dice SEMIDEFINITA NEGATIVA se $\forall x \in \mathbb{R}^m: q_A(x) \leq 0$
- A si dice INDEFINITA se $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m: q_A(x_1) > 0$ e $q_A(x_2) < 0$

Ovviamente A definita positiva $\Rightarrow A$ semidefinita positiva
 A definita negativa $\Rightarrow A$ semidefinita negativa
 A indefinita $\Leftrightarrow A$ non è né semidefinita positiva né semidefinita negativa

Osservazione Il problema di determinare la SEGNALE di una matrice quadrata simmetrica A di dimensioni $n \times n$, ovvero stabilire se A sia definita / semidefinita positiva / negativa oppure indefinita, è un esercizio non banale.

Un generale più grande n e più sono lunghi i calcoli.

Noi ci limiteremo al caso 2×2 e 3×3

DETERMINANTE di una MATRICE 2×2

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matrice 2×2

$\det A = ad - bc$ si chiama DETERMINANTE di A e si ottiene moltiplicando gli elementi delle **diagonali principali** e sottraendo al risultato di questo prodotto il prodotto degli elementi delle **diagonali secondarie**

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

DETERMINANTE di una MATRICE 3×3

Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ una matrice 3×3

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Si calcola mediante la REGOLA di SARRUS

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

↑
abbiamo ricoperto gli elementi della matrice a destra

Si moltiplicano gli elementi delle tre **diagonali principali** e delle tre **diagonali secondarie**, e si sommano questi sei prodotti prendendo con segno $+$ quelli provenienti dalle diagonali principali e con segno $-$ quelli provenienti dalle diagonali secondarie