LEZIONE 41

lunedì 18 dicembre 2023 09:05

Successioni e serie

Cosa significa sommare infiniti numeri?

$$\frac{1}{3} = 0,\overline{3} = 0,333333\ldots$$
$$= 0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + 0,00003\ldots$$

Def: Una SUCCESSIONE DI NUMERI REALI è una funzione $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.
$$n \longmapsto a_n$$

Le successioni si indicano anche con $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

OSS: Consideriamo successioni anche le funzione che hanno dominio $\mathbb{N}\setminus A$ dove $A\subseteq\mathbb{N}$ è un insieme finito. In tal caso si scrive: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}\setminus A}$

ESEMPI DI SUCCESSIONI

1) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = n$. Vuol dire:
$a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ ...

2) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ dove $a_n = \frac{1}{n}$.
$a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$ ....

3) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = n^3$
$a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 8$, $a_3 = 27$ ....

Dato che le successioni sono funzioni, possiamo calcolarne i limiti. Ma $D_r(\mathbb{N}) = \{+\infty\}$ (e $D_r(\mathbb{N}\setminus A) = \{+\infty\}$) quindi per le successioni si può calcolare solo il limite per $n \to +\infty$.

ESEMPI

1) $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

3) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+1}{1+2n-n^3} = -1$

4) $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = ?$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{\log\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)} = e^{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$= e^{n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+o(1)} \xrightarrow{n\to} e^1 = e$$

5) $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen} n \quad \nexists$

6) $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \quad \nexists$ $\qquad (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$

7) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$ $\qquad \infty^0 \quad$ f.i.

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\log n^{\frac{1}{n}}} = e^{\frac{1}{n}\log n} = e^{\frac{\log n}{n}} \xrightarrow{n\to+\infty} e^0 = 1.$$

$$\frac{\log n}{n} \to 0$$

Def: Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali e sia $n_0 \in \mathbb{N}$. Allora: tale che $M \geq n_0$, possiamo definire $S_M = \sum_{n=n_0}^{M} a_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \dots + a_M$.

S_M si dice SOMMA PARZIALE M-ESIMA della successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. con INDICE INIZIALE n_0.

La successione $\{S_M\}_{M\in\mathbb{N},\, M\geq n_0}$ si dice SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con indice iniziale n_0.

Def. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione e sia $n_0 \in \mathbb{N}$. Definiamo SERIE di termini a_n e indice iniziale n_0 la quantità $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n := \lim_{M\to+\infty} S_M$ dove $S_M = \sum_{n=n_0}^{M} a_n$.

- Si dice che la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è CONVERGENTE se esiste finito il limite $\lim_{M\to+\infty} S_M$.
- Si dice che la serie è DIVERGENTE A $+\infty$ se $\lim_{M\to+\infty} S_M = +\infty$
- Si dice che la serie è DIVERGENTE A $-\infty$ se $\lim_{M\to+\infty} S_M = -\infty$
- Si dice che la serie è INDETERMINATA o IRREGOLARE $\nexists \lim_{M\to+\infty} S_M$.

ESEMPI

1) $\sum_{n=1}^{\infty} 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \lim_{M\to+\infty} \sum_{n=1}^{M} 1 = \lim_{M\to+\infty} M = +\infty$$

(la serie diverge a $+\infty$).

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (SERIE DI MENGOLI)

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$$

$$S_1 = \sum_{n=1}^{1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3}$$

$$S_3 = \sum_{n=1}^{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}$$

$$= 1 - \frac{1}{4}$$

In generale:

$$S_M = \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{M+1}$$

In particolare

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{M \to +\infty} 1 - \frac{1}{M+1} = 1$$

(Serie convergente)

Serie Telescopiche: Si dice che una serie $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ è TELESCOPICA se $\exists$ una successione $\{b_n\}_{n \geq n_0}$ tale che $a_n = b_n - b_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Nell'esempio precedente $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ e $b_n = \frac{1}{n}$.

Per le serie telescopiche:

$$S_{n_0} = \sum_{n=n_0}^{n_0} a_n = a_{n_0} = b_{n_0} - b_{n_0+1}$$

$$S_{n_0+1} = \sum_{n=n_0}^{n_0+1} a_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} = b_{n_0} - \cancel{b_{n_0+1}} + \cancel{b_{n_0+1}} - b_{n_0+2}$$

In generale: $S_M = b_{n_0} - b_{M+1}$

OSS L'indice di sommatoria può essere indicato con varie lettere, senza cambiare il valore della somma:

$$\sum_{k=n_0}^{M} a_k = \sum_{n=n_0}^{M} a_n = \sum_{j=n_0}^{M} a_j$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \log n - \log(n+1)$$

Serie telescopica con $b_n = \log n$

$$= \lim_{M \to +\infty} \sum_{n=2}^{M} \log n - \log(n+1)$$

$$= \lim_{M \to +\infty} \log 2 - \log(M+1) = -\infty$$

La serie diverge a $-\infty$.

<u>Serie geometrica</u> (di ragione x)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (1 + x + x^2 + x^3 + \dots\dots)$$

- Se $x = 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$.
- Se $x \neq 1$:

$$S_M = \sum_{n=0}^{M} x^n$$ Moltiplichiamo per $1-x$:

$$(1-x) S_M = (1-x) \sum_{n=0}^{M} x^n = \sum_{n=0}^{M} (1-x) x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{M} x^n - x^{n+1} \quad \text{(somma telescopica)}$$

$$= x^0 - x^{M+1} = 1 - x^{M+1}$$

Quindi $(1-x) S_M = 1 - x^{M+1}$ cioè

$$S_M = \frac{1 - x^{M+1}}{1-x}$$

Dato che $\lim_{n \to +\infty} x^{n+1} = \begin{cases} +\infty & \text{se } x > 1 \\ 0 & \text{se } -1 < x < 1 \\ \nexists & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$

concludiamo che:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \begin{cases} +\infty & \text{se } x > 1 \\ \frac{1}{1-x} & -1 < x < 1 \\ \nexists & \text{se } x \le -1 \end{cases}$$

Quindi:

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ è: divergente a $+\infty$ se $x \geq 1$.
convergente a $\frac{1}{1-x}$ se $-1 < x < 1$
indeterminata se $x \leq -1$.

ESEMPI

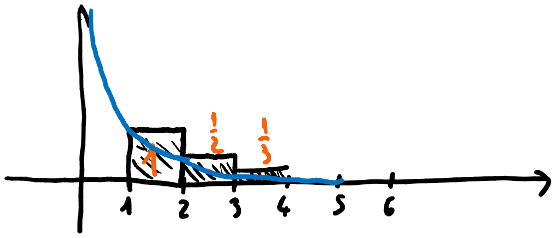
- $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = +\infty$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - 1 = 2 - 1 = 1.$
- $0,33333\ldots\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$

$$= 3\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} - 1\right) = 3\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1\right)$$

$$= 3\left(\frac{10}{9} - 1\right) = 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3}.$$

SERIE ARMONICA

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ è divergente a $+\infty$.



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \geq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$$
$$= \lim_{M \to +\infty} \int_1^M \frac{1}{x}\,dx$$
$$= \lim_{M \to +\infty} \log M = +\infty .$$

SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si può dimostrare che la serie è: convergente se $\alpha > 1$
divergente a $+\infty$ se $\alpha \leq 1$.

(Curiosità: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, ...)

TEOREMA (CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONVERGENZA DI UNA SERIE)

Sia $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ una serie. Se la serie è convergente, allora $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.

Attenzione:

Se $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è convergente, allora $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.

Ma NON è vero che se $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$, la serie è divergente

ESEMPIO

$\sum_{n=1}^{\infty}$ non è convergente perché $\nexists \lim_{n \to +\infty} \sin n$
quindi il limite non è 0 e il teorema ci dice che la serie non può essere convergente

Serie a termini non negativi / positivi.

Def: Sia $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ una serie. Si dice che la serie è a TERMINI NON NEGATIVI (risp. POSITIVI) se $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ (risp. $a_n > 0$).

Def: Si dice che una serie è A TERMINI DEFINITIVAMENTE NON NEGATIVI se $a_n \geq 0$ definitivamente (cioè $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ $n_1 \geq n_0$ t.c. $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1$).

Analogamente:

Def: Si dice che una serie è A TERMINI DEFINITIVAMENTE POSITIVI se $a_n > 0$ definitivamente (cioè $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ $n_1 \geq n_0$ t.c. $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1$).

TEOREMA: Se una serie è a termini (definitivamente) non negativi, allora la serie può essere solo convergente o divergente a $+\infty$.

⌈Idea: S_N è una successione monotona crescente e quindi ammette limite che può essere finito oppure $+\infty$. ⌋

Spesso questo fatto si può usare insieme alla condizione necessaria per provare che una serie è divergente.

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1} \qquad\qquad \frac{n^2}{n^2+1} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

quindi è una serie a termini non negativi.

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 \neq 0$. La condizione necessaria per la conv. ci dice che la serie non può essere convergente. Per il teorema precedente, è divergente.

Criteri di convergenza per serie a termini non negativi:

1) Criterio della radice n-esima.

Sia $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ una serie a termini non negativi (definitivamente) e supponiamo che $\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\}$.

Allora:

1) Se $l<1$, la serie è convergente

2) Se $l>1$ la serie è divergente a $+\infty$.

(E se $l=1$? BOH! La serie può essere sia divergente che convergente).

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+1}\right)^n$$

È una serie a termini non negativi.

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{3n+1}\right)^n} = \frac{n+1}{3n+1} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{1}{3} < 1$$

La serie è convergente.

2) Criterio del rapporto

Sia $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi (definitivamente) e supponiamo che $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Allora:

1) Se $l<1$, la serie è convergente.

2) Se $l > 1$, la serie è divergente a $+\infty$.

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

$a_n = \frac{n}{3^n} > 0$ (serie a termini positivi)

$a_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n} = \frac{1}{3}\frac{n+1}{n} \xrightarrow{n \to +\infty} \frac{1}{3} < 1$$

Quindi la serie è convergente.

3) Criterio del confronto

Siano $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ due serie. Assumiamo che $0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$

(oppure $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente).

Allora:

1) Se $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ è convergente, allora $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è conv.

2) Se $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è div. a $+\infty$, anche $\sum_{n=} b_n$ è div. a $+\infty$.

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$$

$e^{-\sqrt{n}} = \frac{1}{e^{\sqrt{n}}}$. Siccome $e^{\sqrt{n}} \geq (\sqrt{n})^4 = n^2$ definitivamente, si ha: $\frac{1}{e^{\sqrt{n}}} \leq \frac{1}{n^2}$.

Dato che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente (serie armonica generalizzata)
anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$ è convergente.

4) Criterio del confronto asintotico.

Siano $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ due serie a termini positivi (definitivamente). Se $\exists \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in (0, +\infty)$, allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hanno lo stesso comportamento.

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \qquad a_n = \frac{1}{2n+1}, \quad b_n = \frac{1}{n}$$

$$\frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{2n+1} \xrightarrow{n \to +\infty} \frac{1}{2} \in (0, +\infty).$$

La serie si comporta come $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ che è divergente.

Quindi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} = +\infty$.

Serie di Taylor

Si può dimostrare che:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2 \right.$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \left. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e \right)$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Serie di Fourier

Sia $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in $[0, 2\pi]$ e tale che $f(0) = f(2\pi)$. Allora $\forall x \in [0, 2\pi]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)$$

dove
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$