MATEMATICA - LEZIONE 3

venerdì 6 ottobre 2023 11:08

Def Sia $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$. Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, n pari. Si definisce RADICE n-ESIMA di y ($\sqrt[n]{y}$) l'unico numero reale non negativo x tale che $x^n = y$.

Def Sia $y \in \mathbb{R}$. Sia $n \in \mathbb{N}$, n dispari. Si definisce RADICE n-ESIMA di y ($\sqrt[n]{y}$) l'unico numero reale x tale che $x^n = y$.

Ricordare:

- n pari: $\sqrt[n]{y}$ è definita solo se $y \geq 0$
  $\sqrt[n]{y} = 0 \iff y = 0$
  $\sqrt[n]{y} \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}, \ y \geq 0.$

- n dispari: $\sqrt[n]{y}$ è definita $\forall y \in \mathbb{R}$.
  $\sqrt[n]{y} = 0 \iff y = 0$
  $\sqrt[n]{y}$ ha lo stesso segno di y.

ESEMPI

- $\sqrt[4]{16} = 2$
- $\sqrt[6]{-16}$ non è definita in $\mathbb{R}$
- $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$
- $\sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \frac{1}{3}$
- $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$ oppure
  $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{2^2} = 2$

Attenzione:
$\sqrt{x^2} = x$ solo se $x \geq 0$

- $x^2 = 4$ le soluzioni sono $x = \pm 2$
  Mentre $\sqrt{4} = 2$

Nota Si può dimostrare che:

- Se n è pari e $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$:

$$\sqrt[n]{y} = \sup \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 , x^n \leq y \}$$

- Se n è dispari e $y \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt[n]{y} = \sup \{ x \in \mathbb{R} \mid x^n \leq y \}$$

Altri numeri definiti tramite sup:

- NUMERO DI NEPERO (e)

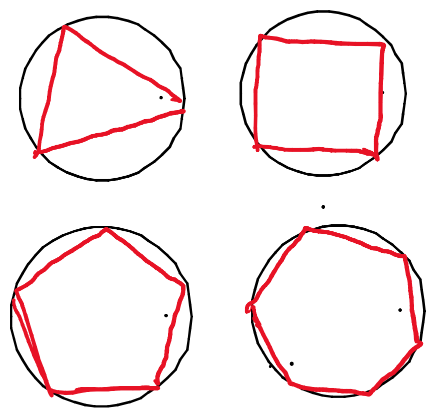
$$e := \sup \left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

$$e = 2,7182 \ldots\ldots$$

- π PI GRECO

$$\pi = \frac{1}{2} \sup \{ P_n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \}$$

dove P_n è il perimetro di un poligono regolare con n vertici inscritto in una circonferenza di raggio 1.



$$\pi = 3,1415 \ldots\ldots$$

Valore assoluto di un numero reale.

Def: Sia $x \in \mathbb{R}$, si definisce VALORE ASSOLUTO di x la quantità

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

ESEMPI

$|2| = 2$

$|-3| = 3$

$|0| = 0$

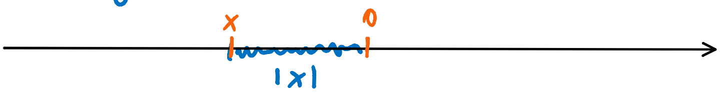
$\left|-\frac{1}{\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

OSS

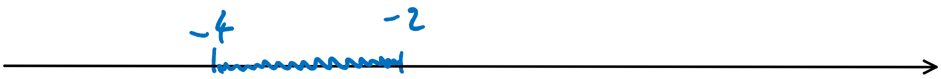
- $\forall x \in \mathbb{R}: \quad \sqrt{x^2} = |x|$
- Se $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ è pari, allora $\forall x \in \mathbb{R}: \quad \sqrt[n]{x^n} = |x|$
- Se $n \in \mathbb{N}$ è dispari: $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha $\sqrt[n]{x^n} = x$.

OSS

$|x|$ è la lunghezza del segmento tra 0 e x sulla retta reale



Più in generale, dati $x, y \in \mathbb{R}$, $|x-y|$ rappresenta la DISTANZA tra x e y sulla retta reale.



distanza: $|-2-(-4)| = |-2+4| = |2| = 2$

OSS 2: Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$: gli intervalli (a, b) e $[a, b]$ si possono scrivere utilizzando il valore assoluto.

$x_0 = \frac{a+b}{2}$ PUNTO MEDIO (O CENTRO) DELL'INTERVALLO

$r = \frac{b-a}{2}$ RAGGIO DELL'INTERVALLO

$$(a, b) = (x_0 - r, x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r\}$$

PROPRIETÀ DEL VALORE ASSOLUTO

1) $\forall x \in \mathbb{R}: \quad |x| \geq 0$.
2) $\forall x \in \mathbb{R}: \quad |x| = 0 \iff x = 0$
3) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad |xy| = |x||y|$

4) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad |x+y| \leq |x| + |y|$ (DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE)

5) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ y \neq 0: \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

6) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad |x-y| \leq |x| + |y|$

7) $\forall x \in \mathbb{R}: \quad |-x| = |x|$

8) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad \big||x| - |y|\big| \leq |x - y|.$

9) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad |x| \leq y \iff -y \leq x \leq y \iff \begin{cases} x \leq y \\ x \geq -y \end{cases}$

$\quad$ (e $|x| < y \iff -y < x < y \iff \begin{cases} x < y \\ x > -y \end{cases}$

10) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad |x| \geq y \iff x \geq y \ \vee \ x \leq -y.$

Potenze reali:

- Se $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $x \in \mathbb{R}$: $\quad x^n = x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$ (n volte)

$$x^0 = 1 \quad (\text{se } x \neq 0)$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad (\text{se } x \neq 0)$$

Def (Potenze con esponente razionale)

Sia $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ e siano $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Definiamo $\quad x^{\frac{n}{m}} := \sqrt[m]{x^n} = \sqrt[m]{\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{(n \text{ volte})}}$

Se $x \neq 0$, definiamo

$$x^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{x^n}}$$

ESEMPI

$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

$$2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}$$

$$10^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{10^{\frac{4}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{10000}}$$

Attenzione: Usare l'uguaglianza $x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$ solo se $x \geq 0$.

$(-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1} \quad -1$

ma

$(-1)^{\frac{1}{3}} = (-1)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[6]{1} = 1$

$(-1)^{\frac{1}{3}}$ non è ben definito.

Restano da definire le potenze con esponente irrazionale.
Cosa significa 2^{π}?

Def: Sia $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ e sia $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $a > 0$.
Se $x \geq 1$, definiamo $x^a = \sup\{x^q \mid q \in \mathbb{Q} \ 0 < q < a\}$
Se $x < 1$, definiamo $x^a = \inf\{x^q \mid q \in \mathbb{Q} \ 0 < q < a\}$.
Nota: Se $a < 0$ e $x > 0$, si può definire inoltre $x^a = \frac{1}{x^{|a|}}$.

PROPRIETÀ DELLE POTENZE

1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $y > 0$ e $n \in \mathbb{R}$: $(xy)^n = x^n y^n$
2) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$ e $\forall r, s \in \mathbb{R}$: $x^{r+s} = x^r \cdot x^s$
3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ e $\forall r, s \in \mathbb{R}$: $x^{rs} = (x^r)^s$
4) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $r \in \mathbb{R}$: $x^{-r} = \frac{1}{x^r}$
5) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$: $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$

6) $\forall x \in \mathbb{R}, x>0, \; r, s \in \mathbb{R}: \quad x^{r-s} = \dfrac{x^r}{x^s}$

7) $\forall x \in \mathbb{R}, \; x>0$ e $\forall r \in \mathbb{R}: \quad x^r > 0.$

8) $\forall x \in \mathbb{R}, \; x>0: \quad x^0 = 1$ e $x^1 = x$

9) $\forall x \in \mathbb{R}: \quad 1^x = 1.$

10) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall r, s \in \mathbb{R}, \; x>0, x\neq 1: \quad x^r = x^s \iff r = s$

10) $\forall x \in \mathbb{R}, x>0$ e $\forall r, s \in \mathbb{R}:$

Se $x>1: \quad x^r \le x^s \iff r \le s$

Se $0<x<1: \quad x^r \le x^s \iff r \ge s$

ESEMPI

- $\dfrac{(5^2 \cdot 5^3)^8}{5^{15}} = \dfrac{(5^5)^8}{5^{15}} = \dfrac{5^{40}}{5^{15}} = 5^{40-15} = 5^{25}$

- $2^8 \, 6^{-4} \, 3^2 = \dfrac{2^8 \cdot 3^2}{6^4} = \dfrac{2^8 \cdot 3^2}{2^4 \cdot 3^4} = \dfrac{2^8}{2^4} \cdot \dfrac{3^2}{3^4} = 2^{8-4} \cdot 3^{2-4}$

  $= 2^4 \cdot 3^{-2} = \dfrac{16}{9}$

- $\dfrac{6^3}{3 \cdot 2^5} = \dfrac{2^3 \cdot 3^3}{3 \cdot 2^5} = 2^{-2} \cdot 3^2 = \dfrac{9}{4}$

- La metà di 8^{10} è:

  $\dfrac{1}{2} \cdot 8^{10} = \dfrac{1}{2} \cdot (2^3)^{10} = \dfrac{1}{2} \, 2^{30} = 2^{29}$

- $\dfrac{4}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{2^2}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{2-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^5}$

Attenzione:

$$(x+y)^n \neq x^n + y^n \quad (\text{tranne se } n = 1)$$

$(x+y)^0 = 1$

$(x+y)^1 = x + y$

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

Per ricordare i coefficienti:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

(TRIANGOLO DI TARTAGLIA)

Attenzione:

$$\sqrt[n]{x+y} \neq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$$

Mentre

$$\sqrt[n]{x\,y} = (x\,y)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n}}\, y^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$$

La radice di un prodotto si può spezzare nel prodotto di due radici mentre la radice di una somma NON è la somma delle radici

---

Tutte le regole che abbiamo visto servono a risolvere equazioni e disequazioni.

① Equazioni / disequazioni polinomiali

Sono equazioni/disequazioni del tipo:

$p(x) = 0$ / $p(x) \geq 0$ / $p(x) \leq 0$ / $p(x) > 0$ / $p(x) < 0$

dove $p(x)$ è un polinomio:

$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

(Oppure $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$)

La difficoltà e il metodo risolutivo dipendono dal grado del polinomio.

- Primo grado (facile)
- Secondo grado: $ax^2 + bx + c = 0$
  $ax^2 + bx + c \geq 0$
  $ax^2 + bx + c \leq 0$
  $ax^2 + bx + c > 0$
  $ax^2 + bx + c < 0$

Le soluzioni dipendono da $\Delta = b^2 - 4ac$ e, nel caso delle disequazioni, dal segno di a
(Si veda la lezione 3)

- Grado ≥ 3

TEOREMA (TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA, FORMULAZIONE REALE)
Ogni polinomio a coefficienti reali di grado $n \geq 3$ può essere scritto come prodotto di polinomi di grado 1 o 2.

Sia $p(x)$ un polinomio di grado ≥ 3.
- Per risolvere $p(x)$ si fattorizza $p(x)$ e usa la legge di annullamento del prodotto.
- Per risolvere $p(x) \geq 0$ si fattorizza $p(x)$ e si studia il segno dei fattori

ESEMPIO 1

$$(x+1)(x-2)(x^2+1)(x^2-4) = 0$$

$x+1=0 \quad \vee \quad x-2=0 \quad \vee \quad x^2+1=0 \quad \vee \quad x^2-4=0$

$x=-1 \quad \vee \quad x=2 \quad \vee \quad x^2=-1 \qquad x^2=4$

(impossibile) $\qquad x=2 \vee x=-2.$

Soluzioni: $-1, \ 2, \ -2$

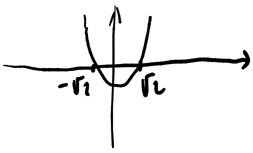
ESEMPIO 2

$$(4x+5)(x^2-2) \geq 0$$

Studio del segno dei fattori:

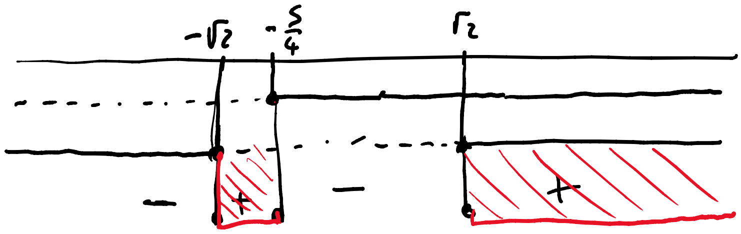
- $4x+5 \geq 0$
  $4x \geq -5$
  $x \geq -\frac{5}{4}$

- $x^2-2 \geq 0$
  Equazione associata: $x^2-2=0 \iff x^2=2 \iff x=\pm\sqrt{2}$



Quindi $x^2-2 \geq 0 \iff x \geq \sqrt{2} \quad \vee \quad x \leq -\sqrt{2}$

- grafico dei segni del prodotto

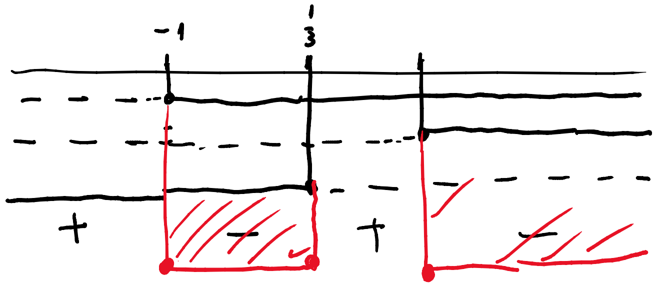


$-\sqrt{2} < x \leq -\frac{5}{4} \quad \vee \quad x \geq \sqrt{2}$

ESEMPIO 3

$$(x+1)(x-2)(1-3x) \leq 0$$

- $x+1 \geq 0 \iff x \geq -1$
- $x-2 \geq 0 \iff x \geq +2$
- $1-3x \geq 0$
  $3x \leq 1$
  $x \leq \frac{1}{3}$



$-1 \leq x \leq \frac{1}{3} \quad \vee \quad x \geq 2.$

ESEMPIO 4

$x^3 + x^2 - 6x < 0$ Raccogliendo x:

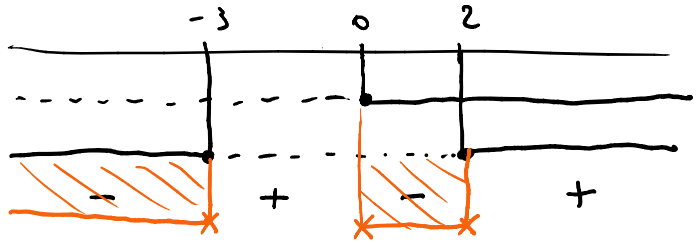
$x(x^2 + x - 6) < 0$

- $x \geq 0$
- $x^2 + x - 6 \geq 0$

$x^2 + x - 6 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

$x \geq 2 \lor x \leq -3$



Soluzioni: $x < -3 \lor 0 < x < 2$

ESEMPIO 5

- $x^3 - 4x + 3 > 0$

Per risolvere la disequazione dobbiamo fattorizzare il polinomio $p(x) = x^3 - 4x + 3$

$P(1) = 1 - 4 + 3 = 0$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -4 & 3 \\ 1 & & 1 & 1 & -3 \\ \hline & \underbrace{1 \quad 1 \quad -3}_{x^2 + x - 3} & & & 0 \end{array}$$

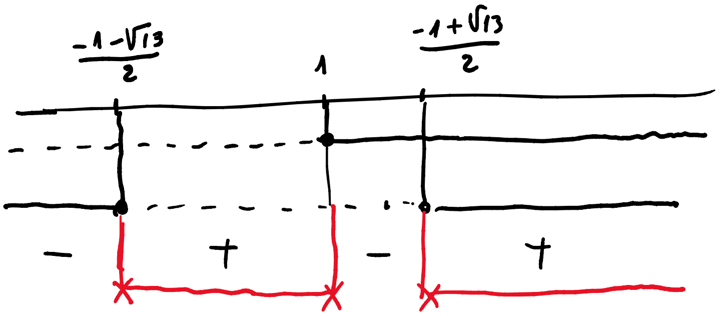
$p(x) = (x-1)(x^2 + x - 3)$

- $x - 1 \geq 0 \iff x \geq 1$
- $x^2 + x - 3 \geq 0$

$x^2 + x - 3 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$x \geq \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \lor x \leq \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$



$\frac{-1-\sqrt{13}}{2} < x < 1 \lor x > \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

Nella prossima lezione vedremo come risolvere equazioni e disequazioni razionali (cioè riconducibili a equazioni del tipo: $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$ / $\frac{p(x)}{q(x)} \geq 0$) e equazioni / disequazioni con valore assoluto.