

Esempi di applicazioni del metodo di similarità

1) Determinare l'integrale generale dell'equazione $y'' - 3y' = x^2 + 1$

Consideriamo l'equazione caratteristica $\lambda^2 - 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 3) = 0$
 $\Rightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 3$

$y_0(x) = C_1 + C_2 e^{3x}$ $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ le soluzioni generali di $y'' - 3y' = 0$

La funzione $g(x) = x^2 + 1$ è un polinomio di II grado

cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\bar{y}(x) = x \cdot (Ax^2 + Bx + C) \quad \text{con } A, B, C \in \mathbb{R} \text{ da determinare}$$

$$= Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

$$\bar{y}'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$$\bar{y}''(x) = 6Ax + 2B$$

$$\bar{y}(x) \text{ è soluzione di } y'' - 3y' = x^2 + 1 \Leftrightarrow (6Ax + 2B) - 3(3Ax^2 + 2Bx + C) = x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow -9Ax^2 + (6A - 6B)x + 2B - 3C = x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -9A = 1 \\ 6(A - B) = 0 \\ 2B - 3C = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{9} \\ B = -\frac{1}{9} \\ C = \frac{2}{3}B - \frac{1}{3} = -\frac{2}{27} - \frac{1}{3} = -\frac{11}{27} \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = x \left(-\frac{x^2}{9} - \frac{x}{9} - \frac{11}{27} \right) = -\frac{x}{9} \left(x^2 + x + \frac{11}{3} \right)$$

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = C_1 + C_2 e^{3x} - \frac{x}{9} \left(x^2 + x + \frac{11}{3} \right) \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

2) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 4y = e^{-2x}$$

Equazione caratteristica $\lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2$

Le soluzioni generali dell'equazione omogenea associata $y'' - 4y = 0$

$$\bar{y}_0(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Determiniamo una soluzione particolare dell'equazione completa con il metodo di similarità $g(x) = e^{-2x} \rightsquigarrow e^{-2x} \times \text{polinomio di grado 0}$

poiché -2 è radice semplice del polinomio caratteristico cerchiamo una soluzione particolare della forma $\bar{y}(x) = Ax e^{-2x}$ con $A \in \mathbb{R}$ da determinare

$$\bar{y}'(x) = A(e^{-2x} + x(-2e^{-2x})) = A(1-2x)e^{-2x}$$

$$\begin{aligned}\bar{y}''(x) &= A(-2e^{-2x} + (1-2x)(-2e^{-2x})) = -4A(1-x)e^{-2x} \\ &= 4A(x-1)e^{-2x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{y}(x) \text{ è soluzione di } y'' - 4y &= e^{-2x} \Leftrightarrow 4A(x-1)e^{-2x} - 4Ax e^{-2x} = e^{-2x} \\ \Leftrightarrow -4Ae^{-2x} &= e^{-2x} \Leftrightarrow -4A = 1 \\ \Leftrightarrow A &= -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\bar{y}(x) = -\frac{x}{4}e^{-2x}$$

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{x}{4}e^{-2x} = c_1 e^{2x} + (c_2 - \frac{x}{4})e^{-2x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

3) Determinare l'integrale generale di $y'' - 4y' + 5y = 3x+1$

$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$ polinomio caratteristico

Le radici del polinomio caratteristico sono

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \quad \lambda_{1/2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$

La soluzione generale di $y'' - 4y' + 5y = 0$ è $y_0(x) = (c_1 \cos x + c_2 \sin x)e^{2x}$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$g(x) = 3x+1$ un polinomio di grado 1

poiché $\lambda=0$ non è radice di $p(\lambda)$ consideriamo $\bar{y}(x) = Ax+B$ con $A, B \in \mathbb{R}$ da determinare

$$\bar{y}'(x) = A, \quad \bar{y}''(x) = 0$$

$$\begin{aligned}\bar{y}(x) \text{ è soluzione di } y'' - 4y' + 5y &= 3x+1 \Leftrightarrow -4A + 5(Ax+B) = 3x+1 \\ \Leftrightarrow 5Ax - 4A + 5B &= 3x+1\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5A = 3 \\ -4A + 5B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{5} \\ B = \frac{4}{5}A + \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{5} \\ B = \frac{17}{25} \end{cases}$$

$\bar{y}(x) = \frac{3}{5}x + \frac{17}{25}$ soluzione particolare trovata con il metodo di similarità

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = (c_1 \cos x + c_2 \sin x)e^{2x} + \frac{3}{5}x + \frac{17}{25}$$

4) Determinare l'integrale generale di $y'' + y = \sin x$

$p(\lambda) = \lambda^2 + 1$ polinomio caratteristico

Equazione caratteristica è $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$

La soluzione generale di $y'' + y = 0$ è $y_0(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$g(x) = \sin x$ $\lambda = i$ è radice semplice di $p(\lambda)$

cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa della forma

$$\bar{y}(x) = x(A \cos x + B \sin x)$$

$$\bar{y}'(x) = A \cos x + B \sin x + x(-A \sin x + B \cos x) = (A+Bx) \cos x + (B-Ax) \sin x$$

$$\begin{aligned}\bar{y}''(x) &= B \cos x - (A+Bx) \sin x - A \sin x + (B-Ax) \cos x \\ &= (-Ax+2B) \cos x + (-Bx-2A) \sin x\end{aligned}$$

$\bar{y}(x)$ è soluzione di $y'' + y = \sin x$

$$\Leftrightarrow (-Ax + 2B) \cos x + (-Bx - 2A) \sin x + Ax \cos x + Bx \sin x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow 2B \cos x - 2A \sin x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2B = 0 \\ -2A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = -\frac{x}{2} \cos x$$

5) Determinare l'integrale generale di $y'' + 2y' + 10y = xe^{-x}$

Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 10$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$ $\lambda_{1/2} = \frac{-2 \pm 6i}{2} = -1 \pm 3i$

$$y_0(x) = (C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)) e^{-x} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$g(x) = xe^{-x}$ $\rightsquigarrow$ polinomio di grado 1 $\times e^{-x}$ $\lambda = 1$ NON è radice di $p(\lambda)$

$$\bar{y}(x) = (Ax + B) e^{-x}$$

$$\bar{y}'(x) = Ae^{-x} + (Ax + B)(-e^{-x}) = (-Ax + A - B)e^{-x}$$

$$\bar{y}''(x) = -Ae^{-x} + (-Ax + A - B)(-e^{-x}) = (Ax - 2A + B)e^{-x}$$

$\bar{y}(x)$ è soluzione di $y'' + 2y' + 10y = xe^{-x}$

$$\Leftrightarrow (Ax - 2A + B)e^{-x} + 2(-Ax + A - B)e^{-x} + 10(Ax + B)e^{-x} = xe^{-x}$$

$$\Leftrightarrow 9Ax + 9B = x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9A = 1 \\ 9B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{9} \\ B = 0 \end{cases}$$

$\bar{y}(x) = \frac{x}{9} e^{-x}$ soluzione particolare di $y'' + 2y' + 10y = xe^{-x}$

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = (C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x) + \frac{x}{9}) e^{-x} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

6) Determinare l'integrale generale di $y'' - 3y' + 2y = \cos x + 2 \sin x$

Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$

Le radici del polinomio caratteristico sono $\lambda_{1/2} = \frac{3 \pm 1}{2} < \frac{1}{2}$

La soluzione generale dell'equazione omogenea associata $y'' - 3y' + 2y = 0$ è data da $y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$

Determiniamo $\bar{y}(x)$ con il metodo di similitudine

$g(x) = \cos x + 2 \sin x$ $\lambda = i$ non è radice del polinomio caratteristico

$$\bar{y}(x) = A \cos x + B \sin x$$

$$\bar{y}'(x) = -A \sin x + B \cos x$$

$$\bar{y}''(x) = -A \cos x - B \sin x$$

$\bar{y}(x)$ è soluzione di: $y'' - 3y' + 2y = \cos x + 2 \sin x$

$$\Leftrightarrow -A \cos x - B \sin x - 3(-A \sin x + B \cos x) + 2(A \cos x + B \sin x) = \cos x + 2 \sin x$$

$$\Leftrightarrow (A - 3B) \cos x + (3A + B) \sin x = \cos x + 2 \sin x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A - 3B = 1 \\ 3A + B = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 + 3B \\ 3(1 + 3B) + B = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 + 3B \\ 10B = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{7}{10} \\ B = -\frac{1}{10} \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = \frac{7}{10} \cos x - \frac{1}{10} \sin x$$

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{7}{10} \cos x - \frac{1}{10} \sin x \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

7) $y'' - 10y' + 25y = e^x \cos x$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 25 = (\lambda - 5)^2 \quad \lambda = 5 \text{ è radice doppia di } p(\lambda)$$

$$y_0(x) = (C_1 + C_2 x) e^{5x} \quad \text{Soluzione generale di } y'' - 10y' + 25y = 0$$

$$g(x) = e^x \cos x \quad \lambda = 1 + i \text{ non è radice}$$

$$\bar{y}(x) = e^x (A \cos x + B \sin x) \quad \text{con } A, B \in \mathbb{R} \text{ da determinare}$$

$$\begin{aligned} \bar{y}'(x) &= e^x (A \cos x + B \sin x) + e^x (-A \sin x + B \cos x) \\ &= e^x ((A+B) \cos x + (B-A) \sin x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y}''(x) &= e^x ((A+B) \cos x + (B-A) \sin x) + e^x (-(A+B) \sin x + (B-A) \cos x) \\ &= e^x (2B \cos x - 2A \sin x) \end{aligned}$$

$\bar{y}(x)$ è soluzione di: $y'' - 10y' + 25y = e^x \cos x$

$$\Leftrightarrow e^x (2B \cos x - 2A \sin x) - 10e^x ((A+B) \cos x + (B-A) \sin x) + 25e^x (A \cos x + B \sin x) = e^x \cos x$$

$$\Leftrightarrow e^x ((2B - 10(A+B) + 25A) \cos x + (-2A - 10(B-A) + 25B) \sin x) = e^x \cos x$$

$$\Leftrightarrow e^x ((15A - 8B) \cos x + (8A + 15B) \sin x) = e^x \cos x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15A - 8B = 1 \\ 8A + 15B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{15}{8} B$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{225}{8} B - 8B = 1 \\ A = -\frac{15}{8} B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{289}{8} B = 1 \\ A = -\frac{15}{8} B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -\frac{8}{289} \\ A = \frac{15}{289} \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = \frac{e^x}{289} (15 \cos x - 8 \sin x)$$

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = (C_1 + C_2 x) e^{5x} + \frac{e^x}{289} (15 \cos x - 8 \sin x) \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$8) \quad y'' + 2y' + y = xe^{-x}$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 \quad \lambda = -1 \text{ è una radice doppia di } p(\lambda)$$

$$y_0(x) = (C_1 + C_2 x) e^{-x} \quad \text{soluzione generale di } y'' + 2y' + y = 0$$

$$g(x) = xe^{-x} \quad \lambda = -1 \text{ radice doppia}$$

$$\bar{y}(x) = x^2 (Ax + B) e^{-x} = (Ax^3 + Bx^2) e^{-x} \quad \text{con } A, B \in \mathbb{R} \text{ da determinare}$$

$$\bar{y}'(x) = (3Ax^2 + 2Bx) e^{-x} + (Ax^3 + Bx^2) (-e^{-x})$$

$$= (-Ax^3 + (3A - B)x^2 + 2Bx) e^{-x}$$

$$\bar{y}''(x) = (-3Ax^2 + 2(3A - B)x + 2B) e^{-x} + (-Ax^3 + (3A - B)x^2 + 2Bx) (-e^{-x})$$

$$= (Ax^3 + (-6A + B)x^2 + (6A - 4B)x + 2B) e^{-x}$$

$$\bar{y}(x) \text{ è soluzione di } y'' + 2y' + y = xe^{-x}$$

$$\Leftrightarrow Ax^3 + (-6A + B)x^2 + (6A - 4B)x + 2B - 2Ax^3 + (6A - 2B)x^2 + 4Bx + Ax^3 + Bx^2 = x$$

$$\Leftrightarrow 6Ax + 2B = x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6A = 1 \\ 2B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{6} \\ B = 0 \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = \frac{x^3}{6} e^{-x} \quad \text{soluzione particolare}$$

$$y(x) = (C_1 + C_2 x + \frac{x^3}{6}) e^{-x} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad \text{soluzione generale}$$

$$9) \quad \text{Determinare la soluzione generale di } 4y'' + 4y' + 2y = 3 \cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

Il polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = 4\lambda^2 + 4\lambda + 2 = 2(2\lambda^2 + 2\lambda + 1)$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-2 \pm 2i}{4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}$$

La soluzione generale dell'equazione omogenea associata è

$$y_0(x) = (C_1 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)) e^{-\frac{x}{2}} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = 3 \cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} \quad \lambda = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \text{ è radice (semplice) di } p(\lambda)$$

$$\bar{y}(x) = xe^{-\frac{x}{2}} (A \cos\left(\frac{x}{2}\right) + B \sin\left(\frac{x}{2}\right))$$

$$\bar{y}'(x) = \underbrace{(1 - \frac{x}{2}) e^{-\frac{x}{2}}}_{\text{derivata di } xe^{-\frac{x}{2}}} (A \cos\left(\frac{x}{2}\right) + B \sin\left(\frac{x}{2}\right)) + \frac{x}{2} e^{-\frac{x}{2}} (-A \sin\left(\frac{x}{2}\right) + B \cos\left(\frac{x}{2}\right))$$

$$= e^{-\frac{x}{2}} \left\{ \left[A(1 - \frac{x}{2}) + \frac{B}{2}x \right] \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \left[B(1 - \frac{x}{2}) - \frac{A}{2}x \right] \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right\}$$

$$= e^{-\frac{x}{2}} \left\{ \left[(-\frac{A}{2} + \frac{B}{2})x + A \right] \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \left[(-\frac{A}{2} - \frac{B}{2})x + B \right] \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right\}$$

$$= e^{-\frac{x}{2}} \left\{ \left[\frac{1}{2}(-A+B)x + A \right] \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \left[-\frac{1}{2}(A+B)x + B \right] \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
\bar{y}''(x) &= -\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \left\{ \left[\frac{1}{2}(-A+B)x + A \right] \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \left[-\frac{1}{2}(A+B)x + B \right] \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right\} \\
&\quad + e^{-\frac{x}{2}} \left\{ \frac{1}{2}(-A+B) \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \left[\frac{1}{4}(A-B)x - \frac{A}{2} \right] \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}(A+B) \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \left[-\frac{1}{4}(A+B)x + \frac{B}{2} \right] \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right\} \\
&= e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \left\{ \left[\frac{1}{4}(A-B) - \frac{1}{4}(A+B) \right] x + \left[-\frac{A}{2} + \frac{1}{2}(-A+B) + \frac{B}{2} \right] \right\} \\
&\quad + e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \left\{ \left[\frac{1}{4}(A+B) + \frac{1}{4}(A-B) \right] x + \left[-\frac{B}{2} - \frac{A}{2} - \frac{1}{2}(A+B) \right] \right\} \\
&= e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \left\{ -\frac{B}{2}x - A+B \right\} + e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \left\{ \frac{A}{2}x - A-B \right\} \\
&= e^{-\frac{x}{2}} \left\{ \left[-\frac{B}{2}x - A+B \right] \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \left[\frac{A}{2}x - A-B \right] \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right\}
\end{aligned}$$

$\bar{y}(x)$ è soluzione di $4y'' + 4y' + 2y = 3 \cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$

$\Leftrightarrow \bar{y}(x)$ è soluzione di $2y'' + 2y' + y = \frac{3}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow 2e^{-\frac{x}{2}} \left\{ \left[-\frac{B}{2}x - A+B \right] \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \left[\frac{A}{2}x - A-B \right] \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right\} \\
+ 2e^{-\frac{x}{2}} \left\{ \left[\frac{1}{2}(-A+B)x + A \right] \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \left[-\frac{1}{2}(A+B)x + B \right] \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right\} \\
+ x e^{-\frac{x}{2}} (A \cos\left(\frac{x}{2}\right) + B \sin\left(\frac{x}{2}\right)) = \frac{3}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \left\{ \left[2 \cdot \left(-\frac{B}{2}\right) + 2 \cdot \frac{1}{2}(-A+B) + A \right] x + \left[2(-A+B) + 2A \right] \right\} \\
+ e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \left\{ \left[2 \cdot \frac{A}{2} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(A+B) + B \right] x + \left[-2(A+B) + 2B \right] \right\} = \frac{3}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{x}{2}} \left\{ 2B \cos\left(\frac{x}{2}\right) - 2A \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right\} = \frac{3}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\Leftrightarrow B \cos\left(\frac{x}{2}\right) - A \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{3}{4} \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{3}{4} \\ -A = 0 \end{cases}$$

concludiamo che $\bar{y}(x) = \frac{3}{4} x e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ è una soluzione particolare

$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = \left(C_1 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \left(C_2 + \frac{3}{4}x \right) \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right) e^{-\frac{x}{2}}$ è la soluzione generale