LEZIONE 37

lunedì 11 dicembre 2023 09:07

Equazioni differenziali ordinarie (riepilogo)

- $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ (n è detto ORDINE dell'equazione)
- Una SOLUZIONE è una funzione $y: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo tale che $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$.
- SOLUZIONE GENERALE: insieme di tutte le soluzioni.
- Equazioni differenziali ordinarie in FORMA NORMALE:
  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$
- PROBLEMI DI CAUCHY associati a un'eq. in forma normale:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Questi problemi hanno (sotto opportune ipotesi) un'unica soluzione.

EQUAZIONI LINEARI DI I ORDINE: $y'(x) = a(x)y + g(x)$.

- Se $g(x) \equiv 0$ (eq. omogenea): $y(x) = Ke^{A(x)}$ con $K \in \mathbb{R}$ e $\int a(x)\,dx = A(x) + c$.
- Se $g(x) \not\equiv 0$ (eq. completa): la soluzione è del tipo
  $y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x)$ dove $y_0(x)$ È LA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE OMOGENEA $y_0' = a(x)y_0$ e $\bar{y}(x)$ è una SOLUZIONE PARTICOLARE DELL'EQ. COMPLETA.
  La soluzione $\bar{y}$ si può trovare:
  1) con il metodo di VARIAZIONE DELLE COSTANTI
  2) con il metodo di SIMILARITÀ (solo se $a(x)$ è costante).

Equazioni di I ordine a variabili separabili:

Sono equazioni del tipo $y' = a(x)\,b(y)$.

TEOREMA (DI ESISTENZA E UNICITÀ PER EQ. A VARIABILI SEPARABILI)

Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ due intervalli aperti. Siano $a \in C(I)$, $b \in C^1(I)$. Siano $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$. Allora $\exists\, I_0 \subseteq I$ ed esiste un'unica funzione $y : I_0 \longrightarrow J$ $(y \in C^1(I_0))$ tale che

$$\begin{cases} y' = a(x)\, b(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Idea per risolvere l'equazione

$$y' = a(x)\, b(y)$$

$$\frac{y'}{b(y)} = a(x) \qquad \text{(METODO DI SEPARAZIONE DELLE VARIABILI)}$$

$$\frac{y'(x)}{b(y(x))} = a(x)$$

Integriamo: $\displaystyle\int \frac{y'(x)}{b(y(x))}\, dx = \int a(x)\, dx$

Si calcolano i due integrali:

$$\int a(x)\, dx = A(x) + C_1$$

$$\int \frac{y'(x)}{b(y(x))}\, dx \overset{y=y(x)}{=} \int \frac{1}{b(y)}\, dy = B(y) + C = B(y(x)) + C_2$$

dove B è una primitiva di $\frac{1}{b}$.

$$B(y(x)) + C_2 = A(x) + C_1$$

$$B(y(x)) = A(x) + C \qquad \text{dove } C = C_1 - C_2$$

$$y(x) = B^{-1}(A(x) + C).$$

Attenzione

1) Dividiamo per $b(y(x))$. Questo procedimento funziona solo per le soluzioni per cui $b(y(x)) \neq 0 \quad \forall x$.

2) Bisogna invertire B.

OSS Sia $y(x)$ una soluzione di $y' = a(x)\, b(y)$. Se $\exists\, x_0 \in I$ t.c. $b(y(x_0)) = 0$, allora $y(x) = y(x_0) \quad \forall x \in I$

DIM

Se $y_0 = y(x_0)$ allora $y(x)$ risolve $\begin{cases} y' = a(x)\, b(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Questo problema ha un'unica soluzione.

Ma la funzione costante y_0 è soluzione, infatti:

$$(y_0)' = 0 \quad e \quad a(x)\, b(y_0) = a(x) \underbrace{b(y(x_0))}_{=0} = 0.$$

Quindi $y(x) = y_0 \quad \forall x \in I$.

- Riassumendo: l'equazione $y' = a(x)\, b(y)$ può avere:
  1) Soluzioni costanti: $y(x) = y_0$ dove $b(y_0) = 0$.
  2) Soluzioni per cui $b(y(x)) \neq 0 \; \forall x$ che si trovano per separazione di variabili.

ESEMPIO 1

$$y' = x y^2$$

È un'eq. a variabili separabili dove $a(x) = x$, $b(y) = y^2$

- Cerchiamo le soluzioni costanti:

  $b(y) = 0 \iff y^2 = 0 \iff y = 0$.

  La funzione $y(x) = 0 \; \forall x$ è una soluzione costante dell'eq.

- Cerchiamo le altre soluzioni:

$$y' = x y^2$$

$$\frac{y'}{y^2} = x \quad \Rightarrow \quad \int \frac{y'(x)}{y^2(x)}\, dx = \int x\, dx$$

$$\int x\, dx = \frac{1}{2} x^2 + c_1$$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)^2}\, dx \overset{y = y(x),\ dy = y'(x)\, dx}{=} \int \frac{1}{y^2}\, dy = \int y^{-2}\, dy = -y^{-1} + c_2$$

$$= -\frac{1}{y} + c_2$$

$$= -\frac{1}{y(x)} + c_2$$

Quindi:

$$-\frac{1}{y(x)} = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\frac{1}{y(x)} = -\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)$$

$$y(x) = -\frac{1}{\frac{1}{2}x^2 + C}$$

Soluzione generale:

$$y(x) = -\frac{1}{\frac{1}{2}x^2 + C} \quad \vee \quad y(x) = 0.$$

Commento

$$\int \frac{y'(x)}{b(y(x))}dx = \int \frac{dy}{b(y)}$$ Si usa la sostituzione $y = y(x)$.

Senza specificare la sostituzione, possiamo scrivere direttamente:

$$\frac{y'}{b(y)} = a(x) \implies \int \frac{1}{b(y)}dy = \int a(x)\,dx$$

- In fisica si usa la seguente notazione:

$$y' = a(x)\,b(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = a(x)\,b(y)$$

$$\frac{dy}{b(y)} = a(x)\,dx \implies \int \frac{dy}{b(y)} = \int a(x)\,dx.$$

ESEMPIO 2

$$y' = \frac{(y-1)^4}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1}\cdot (y-1)^4$$

è un'eq. a variabili separabili in cui $a(x) = \frac{1}{x^2+1}$ e $b(y) = (y-1)^4$.

- Cerchiamo le soluzioni costanti:

$$b(y) = 0 \iff (y-1)^4 = 0 \iff y = 1$$

$y(x) = 1 \quad \forall x$ è una soluzione dell'equazione.

- Altre soluzioni

$$y' = \frac{1}{x^2+1}(y-1)^4$$

$$\frac{y'}{(y-1)^4} = \frac{1}{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{(y-1)^4}\,dy = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + c_1$$

$$\int \frac{1}{(y-1)^4}\,dy = \int (y-1)^{-4}\,dy = \frac{1}{-3}(y-1)^{-3} + c_2$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{1}{(y-1)^3} + c_2$$

Si ricordi che:

- $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{1}{1+\alpha}x^{1+\alpha} + c$
- $\int x^{-4}\,dx = \frac{1}{1-4}x^{1-4} + c = \frac{1}{-3}x^{-3} + c$
- $\int (ax+b)^{-4}\,dx \overset{\substack{t=ax+b \\ dt=a\,dx}}{=} \int t^{-4}\frac{1}{a}\,dt = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{-3}t^{-3} + c$

$$= \frac{1}{a}\,\frac{1}{-3}(ax+b)^{-3} + c$$

- $\int \frac{1}{(2x+1)^4}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{1}{-3}(2x+1)^{-3} + c$
- $\int \frac{1}{(x-1)^4}\,dx = -\frac{1}{3}(x-1)^{-3} + c$

Quindi:

$$-\frac{1}{3}\frac{1}{(y(x)-1)^3} = \arctan x + c$$

$$\frac{1}{(y(x)-1)^3} = -3(\arctan x + c)$$

$$(y(x)-1)^3 = -\frac{1}{3(\arctan x + c)}$$

$$y(x)-1 = -\sqrt[3]{\frac{1}{3(\arctan x + C)}}$$

$$y(x) = 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{3(\arctan x + C)}}$$

ESEMPIO 3

$$y' = \frac{\cos(2x)}{y} \qquad \left(\cos(2x)\cdot\frac{1}{y}\right)$$

Variabili separabili in cui $a(x) = \cos(2x)$ e $b(y) = \frac{1}{y}$

- Soluzioni costanti:

  $b(y)=0 \iff \frac{1}{y}=0$ MAI

  Non vi sono soluzioni costanti.

- Cerchiamo le altre soluzioni:

$$y' = \cos(2x)\cdot\frac{1}{y}$$

$$y\,y' = \cos(2x)$$

$$\int y\,dy = \int \cos(2x)\,dx$$ Calcoliamo gli integrali.

$$\int y\,dy = \frac{1}{2}y^2 + C_1$$

$$\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + C_2$$

$$\frac{1}{2}y^2(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + C$$

$$y^2(x) = \sin(2x) + 2C$$

$$|y(x)| = \sqrt{\operatorname{sen}(2x) + 2C}$$

$$y(x) = \sqrt{\operatorname{sen}(2x)+2C} \quad \vee \quad y(x) = -\sqrt{\operatorname{sen}(2x)+2C}$$

ESEMPIO 4

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\cos(2x)}{y} \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

Abbiamo già trovato la soluzione generale:

$$y(x) = \sqrt{\sin(2x) + 2c} \quad \vee \quad y(x) = -\sqrt{\sin(2x) + 2c}.$$

Cerchiamo l'unica soluzione che soddisfa $y(0) = -2$.

Dato che $y(0) = -2 < 0$ sappiamo che $y(x)$ dovrà essere del tipo $y(x) = -\sqrt{\sin(2x)+2c}$. Determiniamo c:

$$y(0) = -\sqrt{2c} \qquad \text{ma} \quad y(0) = -2$$

$$-2 = -\sqrt{2c}$$

$$4 = \sqrt{2c}$$

$$4 = 2c \Rightarrow c = 2$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = -\sqrt{\sin(2x) + 4}$

ESEMPIO 5

$$\begin{cases} y' = e^{3x} \sin y \\ y(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- Le soluzioni costanti dell'equazione sono quelle per cui $\sin y = 0$. Dato che $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \neq 0$ la soluzione che cerchiamo non è costante.

- $y' = e^{3x} \sin y$

  $$\frac{y'}{\sin y} = e^{3x}$$

  $$\int \frac{1}{\sin y}\, dy = \int e^{3x}\, dx$$

$$\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} + c_1$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen} y}\,dy =$$

$$\left[\; t = \tan\frac{y}{2}, \quad dy = \frac{2}{1+t^2}\,dt \qquad \operatorname{sen} y = \frac{2t}{1+t^2} \;\right]$$

$$= \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| + c_2 = \log\left|\tan\frac{y}{2}\right| + c_2$$

Quindi:

$$\log\left|\tan\frac{y}{2}\right| = \frac{1}{3}e^{3x} + c$$

Arrivati a questo punto conviene trovare subito c usando la condizione $y(0) = \frac{\pi}{2}$

$$\log\left|\tan\frac{\pi}{4}\right| = \frac{1}{3}e^{0} + c$$

$$\log 1 = \frac{1}{3} + c$$

$$c = -\frac{1}{3}$$

Quindi:

$$\log\left|\tan\frac{y}{2}\right| = \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}$$

$$\left|\tan\frac{y}{2}\right| = e^{\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}}$$

$$\tan\frac{y}{2} = \pm\, e^{\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}}$$

Per determinare il segno corretto usiamo di nuovo $y(0) = \frac{\pi}{2}$

$$\tan\frac{\pi}{4} = \pm\, e^{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}}$$

$$1 = \pm 1$$

Il segno corretto è +.

$$\tan\frac{y}{2} = e^{\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}}$$

$$\frac{y}{2} = \arctan\left(e^{\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}}\right)$$

$$y(x) = 2\arctan\left(e^{\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}}\right)$$

OSS

L'equazione lineare omogenea $y' = a(x)\,y$ è anche a variabili separabili.

ESEMPIO 6

$$y' = xy$$

- Se la risolviamo come equazione lineare omogenea:

$y' = a(x)\,y$ con $a(x) = x$

la soluzione generale è $y(x) = K e^{A(x)}$ dove $A(x) = \int a(x)\,dx$

$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + c.$ $\Rightarrow y(x) = K e^{\frac{1}{2}x^2}.$

- Se la risolviamo come equazione a variabili separabili:

$y' = xy$ $a(x) = x$, $b(y) = y$

Soluzioni costanti: $b(y) = 0 \iff y = 0 \rightarrow y(x) = 0$ è una soluzione.

Altre soluzioni:

$$\frac{y'}{y} = x$$

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + c_1$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \log|y(x)| + c_2$$

$$\log|y(x)| = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$|y(x)| = e^{\frac{1}{2}x^2 + c}$$

$$y(x) = \pm e^{\frac{1}{2}x^2 + c} = \pm e^c e^{\frac{1}{2}x^2}$$

La soluzione generale è

$$y(x) = \underbrace{e^c}_{K>0} e^{\frac{1}{2}x^2} \quad \vee \quad y(x) = \underbrace{-e^c}_{K<0} e^{\frac{1}{2}x^2} \quad \vee \quad y(x) = 0 \ (K=0)$$

ESEMPIO 7

$$\begin{cases} x y' + y^3 = 0 \\ y(-1) = 0 \end{cases}$$

Guardiamo l'equazione:

$$x y' + y^3 = 0$$

$$x y' = -y^3$$

$$y' = -\frac{1}{x} y^3. \qquad (\text{se } x \neq 0).$$

E' un' eq. a variabili separabili:

$a(x) = -\frac{1}{x}$ e $b(x) = y^3$

Soluzioni costanti: $y^3 = 0 \iff y = 0$

Dato che $y(-1)=0$ la soluzione è la funzione costante $y(x) = 0 \ \forall x$.

ESEMPIO 8

$$\begin{cases} x y' + y^3 = 0 \\ y(-1) = 1 \end{cases}$$

. Stavolta, dato che l'unica soluzione costante dell'equazione $x y' + y^3 = 0$ è $y(x) = 0$ che non soddisfa la condizione $y(-1) = 1$, procediamo per separazione di variabili.

$$y' = -\frac{1}{x} y^3$$

$$\frac{y'}{y^3} = -\frac{1}{x}$$

$$\int -\frac{1}{x}\, dx = -\log|x| + C_1$$

$$\int \frac{1}{y^3}\, dy = \int y^{-3}\, dy = -\frac{1}{2} y^{-2} + C_2 = -\frac{1}{2}\frac{1}{y^2} + C_2$$

Allora:

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{y^2} = -\log|x| + C$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{y^2} = \log|x| - C$$

Conviene determinare C usando la condizione $\underbrace{y(-1)=1}$.

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1^2} = \log|-1| - C$$

$$\frac{1}{2} = 0 - C \qquad \Longrightarrow \qquad C = -\frac{1}{2}$$

Quindi: $\frac{1}{2}\frac{1}{y^2} = \log|x| + \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{y^2} = 2\log|x| + 1$$

$$\frac{1}{y} = \pm\sqrt{2\log|x| + 1}$$

Dato che $y(-1) = 1 > 0$ la soluzione è:

$$\frac{1}{y(x)} = \sqrt{2\log|x| + 1}$$

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\log|x|+1}}$$

ESEMPIO 9

$$\begin{cases} y' y \cos x = \tan x \\ y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1 \end{cases}$$

$$y' y = \frac{\tan x}{\cos x} \qquad \left(y' = \frac{1}{y}\frac{\tan x}{\cos x} \right)$$

- $h(y) = \frac{1}{y}$. $h(y) = 0$ MAI

  Non ci sono soluzioni costanti.

- $y' y = \frac{\tan x}{\cos x}$

$$\int y \, dy = \int \frac{\tan x}{\cos x} \, dx$$

$$\int y \, dy = \frac{1}{2} y^2 + C_1$$

$$\int \frac{\tan x}{\cos x} \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx \qquad \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x \, dx \end{array}$$

$$= -\int \frac{1}{t^2} \, dt = \frac{1}{t} + C_2$$

$$= \frac{1}{\cos x} + C_2$$

Quindi

$$\frac{1}{2} y(x)^2 = \frac{1}{\cos x} + C$$

Determiniamo C usando $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$

$$\frac{1}{2} (-1)^2 = \frac{1}{\frac{1}{2}} + C$$

$$\frac{1}{2} = 2 + C \implies C = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2} y(x)^2 = \frac{1}{\cos x} - \frac{3}{2}$$

$$y(x)^2 = \frac{2}{\cos x} - 3$$

$$y(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{\cos x} - 3}$$

Poiché $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1 < 0$ quindi $y(x) = -\sqrt{\frac{2}{\cos x} - 3}$