

Teorema (METODO di SIMILARITÀ)

Consideriamo una equazione differenziale del 1° ordine del tipo

$$y' = ay + g(x) \quad \text{dove } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ è una costante non nulla}$$

① Se $g(x)$ è una funzione polinomiale di grado n , allora $\exists \bar{y}(x)$ funzione polinomiale di grado al più n soluzione di $y' = ay + g(x)$

② Se $g(x) = e^{\alpha x} p(x)$ con $p(x)$ funzione polinomiale di grado $n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora $\exists q(x)$ funzione polinomiale di grado al più n tale che

$$\bar{y}(x) = \begin{cases} e^{\alpha x} q(x) & \text{se } \alpha \neq a \\ e^{\alpha x} \cdot x \cdot q(x) & \text{se } \alpha = a \end{cases} \quad \text{è soluzione di } y' = ay + g(x)$$

③ Se $g(x) = \cos(\beta x) p(x)$ oppure $g(x) = \sin(\beta x) p(x)$ con $p(x)$ funzione polinomiale di grado n e $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora $\exists q_1(x), q_2(x)$ funzioni polinomiali di grado al più n tali che

$$\bar{y}(x) = q_1(x) \cos(\beta x) + q_2(x) \sin(\beta x)$$

è soluzione di $y' = ay + g(x)$

④ Se $g(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x) p_1(x) + e^{\alpha x} \sin(\beta x) p_2(x)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $p_1(x)$ funzione polinomiale di grado n , $p_2(x)$ funzione polinomiale di grado m , allora $\exists q_1(x), q_2(x)$ funzioni polinomiali di grado al più $\max\{n, m\}$ tali che

$$\bar{y}(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x) q_1(x) + e^{\alpha x} \sin(\beta x) q_2(x)$$

è soluzione di $y' = ay + g(x)$

Esempi (metodo di similaritas)

1) $y' = 5y + 10x^2 - \frac{9}{5}$
equazione differenziale lineare del 1° ordine con $a(x) = 5$ costante
 $y_0(x) = K e^{5x}$ è la soluzione generale di $y' = 5y$

$g(x) = 10x^2 - \frac{9}{5}$ è un polinomio di 2° grado
per la ① del teorema precedente sappiamo che esiste $\bar{y}(x) = Ax^2 + Bx + C$,
con $A, B, C \in \mathbb{R}$ da determinare, soluzione di $y' = 5y + 10x^2 - \frac{9}{5}$

$$\bar{y}'(x) = 2Ax + B$$

$$\bar{y} \text{ è soluzione di } y' = 5y + 10x^2 - \frac{9}{5}$$

$$\Leftrightarrow 2Ax + B = 5(Ax^2 + Bx + C) + 10x^2 - \frac{9}{5}$$

$$\Leftrightarrow (5A + 10)x^2 + (5B - 2A)x + 5C - B - \frac{9}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5A+10=0 \\ 5B-2A=0 \\ 5C-B-\frac{9}{5}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=-\frac{4}{5} \\ C=\frac{1}{5}B+\frac{9}{25}=-\frac{4}{25}+\frac{9}{25}=\frac{5}{25}=\frac{1}{5} \end{cases}$$

$\bar{y}(x) = -2x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{5}$ è una soluzione di $y' = 5y + 10x^2 - \frac{9}{5}$

$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = Ke^{5x} - 2x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{5}$ è la soluzione generale di $y' = 5y + 10x^2 - \frac{9}{5}$

2) $y' = 4y + 2\cos x$ siamo nel caso ③ del teorema con $\beta=1$
 $P(x)=2$ polinomio di grado 0

$$y_0(x) = Ke^{4x}$$

$$\bar{y}(x) = A\cos x + B\sin x \quad \text{con } A, B \in \mathbb{R} \text{ da determinare}$$

$$\bar{y}'(x) = -A\sin x + B\cos x$$

$\bar{y}(x)$ è soluzione di $y' = 4y + 2\cos x$

$$\Leftrightarrow -A\sin x + B\cos x = 4(A\cos x + B\sin x) + 2\cos x$$

$$\Leftrightarrow (4A-B+2)\cos x + (4B+A)\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4A-B+2=0 \\ 4B+A=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -17B+2=0 \\ A=-4B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=\frac{2}{17} \\ A=-\frac{8}{17} \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = -\frac{8}{17}\cos x + \frac{2}{17}\sin x$$

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = Ke^{4x} - \frac{8}{17}\cos x + \frac{2}{17}\sin x$$

3) $y' + 3y = xe^{-x}$ non è scritta in forma normale
 $y' = -3y + xe^{-x}$ EDO lineare del 1° ordine con $a(x) = -3$

$$y_0(x) = Ke^{-3x}$$

$$g(x) = x \cdot e^{-x} \quad \text{siamo nel caso ② del teorema con } a \neq \alpha$$

↑

polinomio di grado 1

$$\bar{y}(x) = (Ax+B)e^{-x}$$

$$\bar{y}'(x) = Ae^{-x} + (Ax+B)(-e^{-x}) = (-Ax + A-B)e^{-x}$$

$\bar{y}(x)$ è soluzione di $y' = -3y + xe^{-x}$

$$\Leftrightarrow (-Ax + A-B)e^{-x} = (-3(Ax+B) + x)e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow (-2A+1)x - 2B-A = (-3A-3B+x)e^{-x} \Leftrightarrow ((1-2A)x + A+2B)e^{-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-2A)x + A+2B = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2A=0 \\ A+2B=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

principio di identità tra polinomi

$$\bar{y}(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{-x} = \frac{1}{4}(2x-1)e^{-x}$$

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = Ke^{-3x} + \frac{1}{4}(2x-1)e^{-x}$$

$$4) \quad y' = -3y + e^{-3x}$$

Siamo nel caso ② con $a = \alpha$

$$y_0(x) = K e^{-3x}$$

$$g(x) = e^{-3x}$$

$e^{-3x} \cdot 1$
 $\uparrow$ polinomio di grado 0

poiché il coefficiente del termine esponenziale $g(x) = e^{-3x}$ coincide con $a(x) = -3$ dobbiamo considerare

$$\bar{y}(x) = A x e^{-3x}$$

$$\bar{y}'(x) = A (e^{-3x} + x (-3e^{-3x})) = A (1-3x) e^{-3x}$$

$$\begin{aligned} \bar{y}(x) \text{ è soluzione di } y' = -3y + e^{-3x} &\Leftrightarrow A(1-3x)e^{-3x} = -3Ax e^{-3x} + e^{-3x} \\ &\Leftrightarrow A e^{-3x} = e^{-3x} \\ &\Leftrightarrow A = 1 \end{aligned}$$

$$\bar{y}(x) = x e^{-3x}$$

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = K e^{-3x} + x e^{-3x} = (K+x) e^{-3x}, \quad K \in \mathbb{R}$$

NB: se ERRONEAMENTE assumiamo anziché $\bar{y}(x)$ nella forma $\bar{y}(x) = A e^{-3x}$ saremmo giunti a una equazione che non ammette soluzioni, infatti:
 $\bar{y}'(x) = -3A e^{-3x}$

$$\begin{aligned} \bar{y}(x) \text{ è soluzione di } y' = -3y + e^{-3x} &\Leftrightarrow -3A e^{-3x} = -3A e^{-3x} + e^{-3x} \\ &\Leftrightarrow 0 = e^{-3x} \text{ impossibile} \end{aligned}$$

$$5) \quad y' = -y + e^{2x} (x \cos x + \sin x) + e^{-x} \sin(2x)$$

$$a(x) = -1$$

$$g(x) = e^{2x} (x \cos x + \sin x) + e^{-x} \sin(2x)$$

$$y_0(x) = K e^{-x} \text{ soluzione generale di } y' = -y$$

$$g(x) = e^{2x} (x \cos x + \sin x) + e^{-x} \sin(2x)$$

questa $g(x)$ non rientra tra i possibili saltocasi del teorema precedente

$$\begin{aligned} \text{Definiamo } g_1(x) &= e^{2x} (x \cos x + \sin x) \\ g_2(x) &= e^{-x} \sin(2x) \end{aligned}$$

$$\text{ce troviamo } \bar{y}_1(x) \text{ soluzione di } y' = -y + g_1(x)$$

$$\bar{y}_2(x) \text{ soluzione di } y' = -y + g_2(x)$$

allora per il principio di sovrapposizione (vedi lezione precedente)

$$\text{otteniamo che } \bar{y}(x) = \bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x) \text{ è soluzione di } y' = -y + g_1(x) + g_2(x) = -y + g(x)$$

Cominciamo cercando $\bar{y}_1(x) = e^{2x} [(Ax+B) \cos x + (Cx+D) \sin x]$

Nelle notazioni del teorema abbiamo, siamo nel caso (i),

$$\alpha = 2, \beta = 1, \quad p_1(x) = x, \quad p_2(x) = 1$$

$$q_1(x) = Ax+B, \quad q_2(x) = Cx+D$$

$$\begin{aligned} \bar{y}_1'(x) &= 2e^{2x} [(Ax+B) \cos x + (Cx+D) \sin x] \\ &\quad + e^{2x} [A \cos x - (Ax+B) \sin x + C \sin x + (Cx+D) \cos x] \\ &= e^{2x} [(2Ax+2B+A+Cx+D) \cos x + (2Cx+2D-Ax-B+C) \sin x] \\ &= e^{2x} \{ [(2A+C)x + A+2B+D] \cos x + [-A+2C)x - B+C+2D] \sin x \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\bar{y}_1(x) + g_1(x) &= -e^{2x} [(Ax+B) \cos x + (Cx+D) \sin x] + e^{2x} (x \cos x + \sin x) \\ &= e^{2x} \{ [(-A+1)x - B] \cos x + [-Cx + (1-D)] \sin x \} \end{aligned}$$

$\bar{y}_1(x)$ è soluzione di $y' = -y + g_1(x)$

$$\Leftrightarrow \bar{y}_1'(x) = -\bar{y}_1(x) + g_1(x)$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} \{ [(2A+C)x + A+2B+D] \cos x + [-A+2C)x - B+C+2D] \sin x \} = e^{2x} \{ [(-A+1)x - B] \cos x + [-Cx + (1-D)] \sin x \}$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} \{ [(3A+C-1)x + A+3B+D] \cos x + [(-A+3C)x - B+C+3D-1] \sin x \} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3A+C-1=0 \\ A+3B+D=0 \\ -A+3C=0 \\ -B+C+3D=1 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} A=3C = \frac{3}{10} \\ C = \frac{1}{10} \\ 3B+D = -A = -\frac{3}{10} \\ -B+3D = 1-C = \frac{9}{10} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{10} \\ C = \frac{1}{10} \\ D = -3B - \frac{3}{10} = +\frac{27}{50} - \frac{3}{10} = \frac{12}{50} = \frac{6}{25} \\ -B + 3(-3B - \frac{3}{10}) = \frac{9}{10} \Rightarrow -10B = \frac{9}{5} \Rightarrow B = -\frac{9}{50} \end{cases}$$

$$\bar{y}_1(x) = e^{2x} \left(\left(\frac{3}{10}x - \frac{9}{50} \right) \cos x + \left(\frac{x}{10} + \frac{6}{25} \right) \sin x \right)$$

Applichiamo il metodo di similarità per trovare $\bar{y}_2(x)$ (anche qui siamo nel caso (i))

$$g_2(x) = e^{-x} \sin(2x)$$

nelle notazioni del teorema

$$\alpha = -1, \beta = 2$$

$$p_1(x) = 0, \quad p_2(x) = 1$$

$$\text{cerchiamo } \bar{y}_2(x) = e^{-x} (E \cos(2x) + F \sin(2x))$$

$$\begin{aligned} \bar{y}_2'(x) &= -e^{-x} (E \cos(2x) + F \sin(2x)) + e^{-x} (-2E \sin(2x) + 2F \cos(2x)) \\ &= e^{-x} ((-E+2F) \cos(2x) + (-2E-F) \sin(2x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\bar{y}_2(x) + g_2(x) &= -e^{-x} (E \cos(2x) + F \sin(2x)) + e^{-x} \sin(2x) \\ &= e^{-x} (-E \cos(2x) + (-F+1) \sin(2x)) \end{aligned}$$

$\bar{y}_2(x)$ è soluzione di $y' = -y + g_2(x)$

$$\Leftrightarrow e^{-x} \left((-E+2F) \cos(2x) + (-2E-F) \sin(2x) \right) = e^{-x} \left(-E \cos(2x) + (-F+1) \sin(2x) \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -E+2F = -E \\ -2E-F = -F+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F=0 \\ E=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\bar{y}_2(x) = -\frac{1}{2} e^{-x} \cos(2x)$$

La soluzione generale di $y' = -y + g(x)$ è

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0(x) + \bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x) \\ &= K e^{-x} + e^{2x} \left(\frac{3}{10}x - \frac{9}{50} \right) \cos x + e^{2x} \left(\frac{x}{10} + \frac{6}{25} \right) \sin x - \frac{1}{2} e^{-x} \cos(2x), \quad K \in \mathbb{R} \end{aligned}$$