

Equazioni differenziali ordinarie (EDO / ODE)

Un'equazione differenziale ordinaria è un'equazione in cui compare

- una variabile indipendente x
- una funzione incognita $y = y(x)$ ← da determinare
- alcune derivate della funzione y

Esempi:

- $y'(x) + x y(x) = 0$
- $y''(x) - y'(x) = x \cos(y(x))$
- $\frac{y'''(x) + 1}{1 + (y'(x))^2} = y'(x) - y(x) + e^x$

Definizione Una EQUAZIONE DIFFERENZIALE ORDINARIA è un'espressione del tipo

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(m)}(x)) = 0 \quad \text{dove } F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^{m+2} \rightarrow \mathbb{R}$$

e y è una funzione incognita.

Il numero $m \in \mathbb{N}$, cioè il più grande ordine di derivazione della funzione incognita che compare nell'equazione differenziale si dice ORDINE della EDO

- $y'(x) + y(x) = 2x y(x)$ ordine 1
- $y'''(x) = x^2 (y''(x) + y(x))$ ordine 3

Molto spesso si scrive direttamente y al luogo di $y(x)$, ad esempio $y''(x) + y'(x) = x y(x)$ si scrive anche $y'' + y' = xy$

Definizione Si dice che una EDO è in FORMA NORMALE se è del tipo

$$y^{(m)} = f(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}) \quad f: \Omega \subset \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$$

Esempi

- $y' + y = 2xy$ non è in forma normale $y' = -y + 2xy$
- $(y'')^2 + \frac{5}{2} (y')^3 = y$ non è in forma normale

Notazioni alternative

- $y(x)$ funzione incognita $F(x, y, y', \dots, y^{(m)}) = 0$ ← usiamo queste
- $y(t)$ funzione incognita $F(t, y, y', \dots, y^{(m)}) = 0$ } utili in Fisica
- $x(t)$ funzione incognita $F(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(m)}) = 0$

Le equazioni differenziali descrivono l'evoluzione dei fenomeni fisici al variare del tempo

Un'equazione differenziale può ammettere infinite soluzioni:

$$y' = y$$

una soluzione è $y(x) = e^x$

$$y(x) = 0$$

$$y(x) = 2e^x$$

più in generale $y(x) = K e^x$ $K \in \mathbb{R}$
è soluzione

Definizione Si dice INTEGRALE GENERALE / SOLUZIONE GENERALE dell'EDO l'insieme di tutte le soluzioni di queste equazioni

Esempio

- $y'' = -y$ $y(x) = \sin x$, $y(x) = \cos x$ sono soluzioni di questa EDO
Più in generale $y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ al variare di $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ è una soluzione.
Si può dimostrare che tutte le soluzioni sono della forma precedenti

È molto comune associare a una EDO delle CONDIZIONI INIZIALI.
Si considerano dei problemi del tipo

$$\begin{cases} y^{(m)} = f(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(x_0) = y_{m-1} \end{cases}$$

questo tipo di problemi si chiamano PROBLEMI di CAUCHY, $y_0, y_1, \dots, y_{m-1}$
si chiamano condizioni iniziali assegnate per $x = x_0$

NB: Una EDO ha infinite soluzioni, mentre un problema di Cauchy ammette un'unica soluzione (sotto opportune ipotesi per f)

Esempio: $\begin{cases} y' = x^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$ Problema di Cauchy

$$y' = x^2 \quad \rightarrow \quad y(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \frac{x^3}{3} + C \text{ è l'integrale generale dell'equazione differenziale } y' = x^2$$

Per risolvere il problema di Cauchy determiniamo C in modo tale che $y(0) = 2$

$$y(0) = \frac{0^3}{3} + C = C \quad \Rightarrow \quad C = 2$$

$$y(x) = \frac{x^3}{3} + 2 \text{ è l'unica soluzione del problema di Cauchy}$$

Equazioni differenziali integrabili:

$$y' = f(x) \quad \text{ordine 1}$$

$$y^{(m)} = f(x) \quad \text{ordine } m$$

Queste equazioni si risolvono integrando m - volte $f(x)$

Esempio: Risolviamo l'equazione differenziale integrabile $y''' = \cos x$

$$y''(x) = \int \cos x dx = \sin x + C_1$$

$$y'(x) = \int (\sin x + C_1) dx = -\cos x + C_1 x + C_2$$

$$y(x) = \int (-\cos x + C_1 x + C_2) dx = -\sin x + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3 \quad \text{con } C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

Non tutte le equazioni differenziali si possono risolvere in questo modo:

$$y' = y \quad \text{integrando otteniamo} \quad y(x) = \int y(x) dx$$

ma non conosciamo y e quindi non possiamo calcolare $\int y(x) dx$

Dimostriamo che tutte le soluzioni di $y' = y$ si scrivano nella forma $y(x) = K e^x$ per qualche $K \in \mathbb{R}$.

Sia $y = y(x)$ una soluzione e diamo $z(x) = y(x) e^{-x}$

$$\text{Allora } z'(x) = y'(x) e^{-x} + y(x) \cdot (-e^{-x}) = \underbrace{(y'(x) - y(x))}_{=0} e^{-x} = 0 \quad \text{per il te. di Lagrange}$$

$$\Rightarrow \exists K \in \mathbb{R} \text{ tale che } z(x) = K$$

$$\Rightarrow K = z(x) = y(x) e^{-x} \quad \Rightarrow y(x) = K e^x$$

Equazioni differenziali lineari del 1° ordine

Sono equazioni del tipo

$$y' = a(x)y + g(x) \quad (E)$$

dove $a, g: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, a, g sono continue in I

- se $g \equiv 0$, (E) è una equazione differenziale lineare **OMOGENEA**
- altrimenti, (E) è una equazione differenziale lineare **NON OMOGENEA** (oppure **COMPLETA**) del 1° ordine e l'equazione $y' = a(x)y$ si chiama equazione differenziale omogenea associata

CASO OMOGENEO: $y' = a(x)y$

- Abbiamo già visto che l'integrale generale di $y' = y$ è dato da $y(x) = K e^x$
- Analogamente si trova che l'integrale generale di $y' = 2y$ è dato da $y(x) = K e^{2x}$

Teorema (soluzioni generali di $y' = a(x)y$)

Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo. Sia $a: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua in I

Allora l'integrale generale di $y' = a(x)y$ è $y(x) = K e^{A(x)}$ dove $K \in \mathbb{R}$ e $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$.

Dimostrazione: Sia $y = y(x)$ una soluzione di $y' = a(x)y$

$$\text{Consideriamo } z(x) = y(x) e^{-A(x)}$$

$$z'(x) = y'(x) e^{-A(x)} + y(x) e^{-A(x)} (-A'(x))'$$

$$= y'(x) e^{-A(x)} - a(x) y(x) e^{-A(x)} = \underbrace{(y'(x) - a(x)y(x))}_{=0} e^{-A(x)}$$

$\uparrow$
 A è primitiva di a , $A' = a$

Per un corollario al teorema di Lagrange

$$\exists K \in \mathbb{R} \text{ tale che } z(x) = K \Rightarrow y(x) \cdot e^{-A(x)} = K$$

$$\Rightarrow y(x) = K e^{A(x)}$$

Esempi:

1) $y' = xy$ è un'equazione differenziale lineare del 1° ordine omogenea $a(x) = x$

$$A(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2} + c \quad \text{scegliamo } A(x) = \frac{x^2}{2}$$

le soluzioni generali di $y' = xy$ è $y(x) = K e^{\frac{x^2}{2}}$, $K \in \mathbb{R}$

2) $y' = \sin(2x)y$ equazioni differenziali lineari omogenee del 1° ordine
con $a(x) = \sin(2x)$

$$A(x) = \int \sin(2x) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x) + c$$

Scegliamo $c=0$, eusero $A(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x)$

$y(x) = K e^{-\frac{1}{2} \cos(2x)}$ è la soluzione generale di $y' = \sin(2x)y$

3) Risolviamo il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \frac{y}{(3x-1)^2} \\ y(0) = e \end{cases}$$

Cominciamo determinando la soluzione generale della EDO $y' = \frac{y}{(3x-1)^2}$
questa è una equazione differenziale lineare e omogenea del 1° ordine
con $a(x) = \frac{1}{(3x-1)^2}$

$$\int \frac{1}{(3x-1)^2} dx = \int (3x-1)^{-2} dx = -\frac{1}{3} (3x-1)^{-1} + c = \frac{1}{3(1-3x)} + c$$

Scegliamo $A(x) = \frac{1}{3(1-3x)}$, $y(x) = K e^{\frac{1}{3(1-3x)}}$ e i valori di $K \in \mathbb{R}$ descrivono
tutte le soluzioni di $y' = \frac{y}{(3x-1)^2}$

Imponiamo la condizione iniziale $y(0) = e$

$$e = y(0) = K e^{\frac{1}{3(1-3 \cdot 0)}} = K e^{\frac{1}{3}} \Rightarrow K = \frac{e}{e^{\frac{1}{3}}} = e^{1-\frac{1}{3}} = e^{\frac{2}{3}}$$

$y(x) = e^{\frac{2}{3}} e^{\frac{1}{3(1-3x)}} = e^{\frac{2}{3} + \frac{1}{3(1-3x)}}$ è l'unica soluzione del problema di Cauchy

CASO COMPLETO / NON OMogeneo : $y' = a(x)y + g(x)$

Osservazione (PRINCIPIO di SOVRAPPOSIZIONE)

Consideriamo due equazioni del tipo

$$y' = a(x)y + g_1(x) \quad (1)$$

$$y' = a(x)y + g_2(x) \quad (2)$$

Siano y_1 una soluzione di (1) e y_2 una soluzione di (2)

Allora $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la funzione $z(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$ risolve
l'equazione differenziale $z' = a(x)z + \alpha g_1(x) + \beta g_2(x)$

In particolare se $g_1(x) = g_2(x)$ allora $y_1 - y_2$ risolve $z' = a(x)z$

Teorema (Soluzione generale di $y' = a(x)y + g(x)$)

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $a, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue

Allora la soluzione generale dell'equazione differenziale lineare completa del 1° ordine

$$y' = a(x)y + g(x)$$

è data da

$$y(x) = K e^{A(x)} + \bar{y}(x)$$

dove $K \in \mathbb{R}$, $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$

$\bar{y}(x)$ è una soluzione particolare di $y' = a(x)y + g(x)$

OSSERVAZIONI

- La soluzione generale di $y' = a(x)y + g(x)$ è data da $y = y_0 + \bar{y}$ con y_0 è la soluzione generale di $y' = a(x)y$
 $\bar{y}$ una soluzione particolare di $y' = a(x)y + g(x)$
- Se conosciamo una soluzione particolare di $y' = a(x)y + g(x)$ allora la conosciamo tutta (e basta di saper calcolare una primitiva di $a(x)$)

Vediamo adesso due metodi per determinare una soluzione particolare $\bar{y}$

① METODO di VARIAZIONE delle COSTANTI

Cerciamo una soluzione particolare della forma $\bar{y}(x) = K(x)e^{A(x)}$ con $A(x)$ primitiva di $a(x)$ e $K(x)$ funzione da determinare

② METODO di SIMILITUDINE

Questo metodo si può applicare solo quando $a(x)$ è una funzione costante e il termine non omogeneo $g(x)$ appartiene a una particolare classe di funzioni: ovvero quando siamo in uno dei seguenti casi:

- ① $g(x) = p(x)$ dove p è una funzione polinomiale
- ② $g(x) = e^{\alpha x} p(x)$
- ③ $g(x) = \cos(\beta x) p(x)$ oppure $g(x) = \sin(\beta x) p(x)$
- ④ $g(x) = e^{\alpha x} (p_1(x) \cos(\beta x) + p_2(x) \sin(\beta x))$ con p_1, p_2 funzioni polinomiali.

Esempi (Metodo di variazione delle costanti)

1) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione

$$y' = \frac{y}{x} + x^2 \quad \text{con } x \in (0, +\infty) \quad \text{equazione lineare completa}$$

Cominciamo determinando la soluzione generale dell'equazione omogenea associata

$$y' = \frac{y}{x} \quad a(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad A(x) = \ln x$$

$$y_0(x) = K e^{A(x)} = K e^{\ln x} = Kx \quad \text{è la soluzione generale di } y' = \frac{y}{x}$$

determiniamo $\bar{y}$ con il metodo di variazione delle costanti: $\bar{y}(x) = K(x) \cdot x$

$$\bar{y}'(x) = K'(x) \cdot x + K(x)$$

$$\bar{y}(x) \text{ è soluzione di } y' = \frac{y}{x} + x^2 \Leftrightarrow \bar{y}'(x) = \frac{\bar{y}(x)}{x} + x^2$$

$$\Leftrightarrow K'(x) \cdot x + K(x) = \frac{K(x) \cdot x}{x} + x^2 \Leftrightarrow K'(x) \cdot x + \cancel{K(x)} = \cancel{K(x)} + x^2$$

$$\Leftrightarrow K'(x) = \frac{x^2}{x} = x \Leftrightarrow K(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$\bar{y}(x) = K(x) \cdot x = \frac{x^3}{2} \quad \text{soluzione particolare dell'equazione completa}$$

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = Kx + \frac{x^3}{2} \quad \text{soluzione generale dell'equazione completa}$$

2) Determiniamo la soluzione generale della EDO

$$y' = 4x^3 y - e^{x^4} \cos(2x) \quad x \in \mathbb{R}$$

$$a(x) = 4x^3, \quad g(x) = -e^{x^4} \cos(2x)$$

Cominciamo col determinare la soluzione generale di $y' = 4x^3 y$

$$\int a(x) dx = \int 4x^3 dx = x^4 + c \quad \text{scogliamo } A(x) = x^4$$

$$y_0(x) = K e^{A(x)} = K e^{x^4}, \quad K \in \mathbb{R} \quad \text{è la soluzione generale dell'equazione omogenea associata } y' = 4x^3 y$$

Determiniamo una soluzione particolare dell'equazione completa utilizzando il metodo di variazione delle costanti

$$\bar{y}(x) = K(x) e^{x^4}$$

$$\bar{y}'(x) = K'(x) e^{x^4} + K(x) e^{x^4} \cdot 4x^3$$

$$\bar{y}(x) \text{ è soluzione di } y' = 4x^3 y - e^{x^4} \cos(2x)$$

$$\Leftrightarrow \bar{y}'(x) = 4x^3 \bar{y}(x) - e^{x^4} \cos(2x)$$

$$\Leftrightarrow K'(x) e^{x^4} + \cancel{K(x) \cdot 4x^3} = 4x^3 \cdot \cancel{K(x) e^{x^4}} - e^{x^4} \cos(2x)$$

$$\Leftrightarrow K'(x) e^{x^4} = -e^{x^4} \cos(2x)$$

$$\Leftrightarrow K'(x) = -\cos(2x) \quad \Leftrightarrow K(x) = \int -\cos(2x) dx = -\frac{1}{2} \sin(2x) + c$$

$$\bar{y}(x) = -\frac{1}{2} \sin(2x) e^{x^4} \quad \text{soluzione particolare dell'equazione completa}$$

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = K e^{x^4} - \frac{1}{2} \sin(2x) e^{x^4} = \left(K - \frac{1}{2} \sin(2x)\right) e^{x^4}$$

Esercizio nr 202

3) Determinare la soluzione generale di $y' = 2y + 3x$

Cominciamo determinando la soluzione generale di $y' = 2y$

$$y_0(x) = K e^{2x}, \quad K \in \mathbb{R}$$

Determiniamo una soluzione particolare $\bar{y}(x) = K(x) e^{2x}$ dell'equazione completa

$$\bar{y}'(x) = K'(x) e^{2x} + 2K(x) e^{2x}$$

$$\bar{y} \text{ è soluzione di } y' = 2y + 3x \quad \Leftrightarrow \bar{y}'(x) = 2\bar{y}(x) + 3x$$

$$\Leftrightarrow K'(x) e^{2x} + \cancel{2K(x) e^{2x}} = \cancel{2K(x) e^{2x}} + 3x \quad \Leftrightarrow K'(x) e^{2x} = 3x$$

$$\Leftrightarrow K'(x) = 3x e^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow K(x) = \int 3x e^{-2x} dx = 3 \int x e^{-2x} dx = -\frac{3}{2} x e^{-2x} - 3 \int \left(-\frac{1}{2} e^{-2x}\right) dx$$

$$\int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx$$

$$f'(x) = e^{-2x} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow K(x) = -\frac{3}{2} x e^{-2x} - \frac{3}{4} e^{-2x} = -\frac{3}{4} e^{-2x} (2x+1)$$

$$\bar{y}(x) = K(x) e^{2x} = -\frac{3}{4} (2x+1) \quad \text{soluzione particolare di } y' = 2y + 3x$$

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = K e^{2x} - \frac{3}{4} (2x+1), \quad K \in \mathbb{R}$$

soluzione generale