LEZIONE 33

venerdì 1 dicembre 2023 11:22

Nelle ultime lezioni abbiamo visto come calcolare

$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx$ dove N e D sono polinomi.

Il metodo dipende dal grado del denominatore.

- Se $\deg(D) = 1$

ESEMPIO

$$\int \frac{1}{3x-1}\,dx = \frac{1}{3}\log|3x-1| + c$$

Si può vedere questo passaggio in diversi modi

- $\int \frac{1}{3x-1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{\overset{f'}{3}}{\underset{f}{3x-1}}\,dx = \frac{1}{3}\log|3x-1| + C$

- $\int \frac{1}{3x-1}\,dx =$

Sostituzione

$y = 3x-1$, $dy = \frac{d}{dx}(3x-1)\,dx$

$= 3\,dx \Rightarrow dx = \frac{1}{3}dy$

$= \int \frac{1}{y}\,\frac{1}{3}\,dy$

$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{3}\log|y| + c = \frac{1}{3}\log|3x-1| + c.$

ESEMPIO 2

$$\int \frac{x^2}{2x-1}\,dx$$

Quando il grado del numeratore è $\geq$ del grado del denominatore si inizia facendo la divisione con resto tra polinomi.

In questo modo si riduce l'integrale ad uno più semplice in cui il numeratore ha grado minore rispetto al denominatore.

$$
\begin{array}{llll|l}
x^2 & + 0\cdot x & + 0 & & 2x - 1 \\
x^2 & - \frac{x}{2} & & & \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \\
\hline
// & \frac{x}{2} & + 0 & & \\
 & \frac{x}{2} & - \frac{1}{4} & & \\
\hline
 & // & \frac{1}{4} & &
\end{array}
$$

$$x^2 = (2x-1)\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}$$

$$\frac{x^2}{2x-1} = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{4}}{2x-1}$$

Quindi:

$$\int \frac{x^2}{2x-1}\, dx = \int \frac{x}{2} + \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{4}}{2x-1}\, dx$$

$$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2x-1}\, dx$$

$$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\log|2x-1| + c$$

$$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\log|2x-1| + C.$$

oss

$$\frac{x^2}{2x-1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{4x^2}{2x-1} = \frac{1}{4}\,\frac{4x^2-1+1}{2x-1}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{(2x-1)(2x+1) + 1}{2x-1}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(2x+1) + \frac{1}{4}\,\frac{1}{2x-1}$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{2x-1}$$

Vediamo ora alcuni esempi in cui il denominatore ha grado 2:

ESERCIZIO

$$\int \frac{1}{x^2-1}\, dx$$

$\Delta > 0 \quad : \qquad x^2-1 = (x+1)(x-1)$

Cerchiamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

$$= \frac{A(x-1)+B(x+1)}{x^2-1} = \frac{x(A+B)-A+B}{x^2-1}$$

Vogliamo che $1 = x(A+B) - A + B$ quindi

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-A \\ -A-A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=\frac{1}{2} \\ A=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^2-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1}$$

$$\int \frac{1}{x^2-1}\, dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\log|x+1| + \frac{1}{2}\log|x-1| + C.$$

ESERCIZIO

$$\int \frac{12-5x}{\underbrace{3x^2+x-10}}\, dx$$

$\Delta = 1 + 120 = 121 \qquad x_{1,2} = \frac{-1 \pm 11}{6} = \begin{cases} \frac{5}{3} \\ -2 \end{cases}$

$$3x^2+x-10 = 3\left(x-\frac{5}{3}\right)(x+2) = (3x-5)(x+2)$$

Cerchiamo A e B tali che:

$$\frac{12-5x}{3x^2+x-10} = \frac{A}{3x-5} + \frac{B}{x+2}$$
$$= \frac{A(x+2) + B(3x-5)}{(3x-5)(x+2)} = \frac{x(A+3B) + 2A - 5B}{3x^2+x-10}.$$

Vogliamo che $12-5x = x(A+3B) + 2A - 5B$

$$\begin{cases} A+3B = -5 \\ 2A-5B = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -5-3B \\ -10-6B-5B = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -5-3B \\ -11B = 22 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -2 \end{cases}$$

Allora

$$\frac{12-5x}{3x^2+x-10} = \frac{1}{3x-5} - \frac{2}{x+2}$$

$$\int \frac{12-5x}{3x^2+x-10}\,dx = \frac{1}{3}\log|3x-5| - 2\log|x+2| + C.$$

ESERCIZIO

$$\int \frac{x}{x^2+4x+4}\,dx$$

$\Delta = 16 - 16 = 0$ $\qquad x_1 = \frac{-4}{2} = -2$

Infatti: $x^2+4x+4 = (x+2)^2$

Cerco A e B tali che:

$$\frac{x}{x^2+4x+4} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2}$$
$$= \frac{A(x+2) + B}{(x+2)^2}$$

Vogliamo che $x = A(x+2) + B = Ax + 2A + B$

$$\begin{cases} A = 1 \\ 2A + B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -2A = -2 \end{cases}$$

$$\frac{x}{x^2+4x+4} = \frac{1}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2}$$

$$= (x+2)^{-2}$$

$$\int \frac{x}{x^2-4x+4}\,dx = \log|x+2| - 2\int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx$$

$$= \log|x+2| - 2\left(-\frac{1}{x+2}\right) + C$$

$$= \log|x+2| + \frac{2}{x+2} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+4x+4}\,dx = \int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx = -\frac{1}{x+2} + c$$

Nel caso $\Delta = 0$ il passaggio di cercare A e B serve solo quando il numeratore ha grado 1.

$$\frac{c}{(ax+b)^2} = \frac{A}{(ax+b)} + \frac{B}{(ax+b)^2} \Rightarrow A = 0 \quad B = c$$

Non serve perché non cambia l'integrale.

Si può dire direttamente

$$\int \frac{c}{(ax+b)^2}\,dx = c\int (ax+b)^{-2}\,dx = -\frac{c}{a}\,\frac{1}{ax+b} + C$$

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+5}$$

$$\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$$

Cerchiamo A e B tali che:

$$\frac{x+3}{x^2+2x+5} = \frac{A(2x+2)}{x^2+2x+5} + \frac{B}{x^2+2x+5}$$

$$x + 3 = 2Ax + 2A + B$$

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ 2A + B = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = 2 \end{cases}$$

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2+2x+5}$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+2x+5) + 2\underbrace{\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx}$$

Per calcolare il secondo integrale cerchiamo di scriverlo come somma di quadrati:

$$x^2+2x+5 = x^2+2x+1+4 = (x+1)^2+2^2$$

Oppure possiamo cercare le radici complesse del denominatore.

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$$

$$(x+1)^2 + 2^2$$

In generale se $\Delta < 0$ e ax^2+bx+c ha radici complesse $\alpha \pm i\beta$, allora

$$ax^2+bx+c = a\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]$$

$$\int \frac{1}{(x+1)^2+2^2}\,dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C.$$

Ricordare

$$\int \frac{1}{(x+\alpha)^2+\beta^2}\,dx = \frac{1}{\beta}\arctan\left(\frac{x+\alpha}{\beta}\right) + C.$$

Conclusione

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2+2x+5) + \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$$

OSS

$$\int \frac{4}{x^2+2x+5}\,dx = 4\int \frac{1}{(x+1)^2+2^2}\,dx = \frac{4}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$$

$$= 2\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C.$$

Cercare A e B serve solo quando il numeratore ha grado 1 e non c'è la derivata del denominatore

---

Def: Se $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, si dice che f è di CLASSE C^1 in $[a,b]$ se f è continua e derivabile in $[a,b]$ e la derivata è continua in $[a,b]$.
Si scrive che $f \in C^1([a,b])$

TEOREMA (FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI)
Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Siano $f, g \in C^1([a,b])$. Allora

1) $\int f'(x)\, g(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f(x)\, g'(x)\, dx$

2) $\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = \underbrace{f(x)\, g(x) \Big|_a^b}_{f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a).} - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx$

ESEMPI

1) $$\int x \underbrace{e^x}_{f'} dx = \underbrace{e^x}_{f} x - \int e^x \cdot (x)'\, dx$$
$$= x e^x - \int e^x \cdot 1\, dx$$
$$= x e^x - e^x + C.$$

2) $$\int x \underbrace{\cos(2x)}_{f'} dx =$$

$$\boxed{\int \cos(2x) = \frac{1}{2} \sin(2x) + C}$$

$$= \frac{1}{2}\sin(2x)\, x - \int \frac{1}{2} \sin(2x) \cdot 1\, dx$$
$$= \frac{1}{2} x \sin(2x) - \frac{1}{2} \int \sin(2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} x \operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) + C$$

$$= \frac{1}{2} x \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + C.$$

3) Può capitare di dover integrare per parti più di una volta per risolvere un integrale:

$$\int x^2 \underbrace{e^{-x}}_{f'} dx = -e^{-x} \cdot x^2 - \int (-e^{-x}) \cdot 2x\,dx \qquad \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$$

$$= -e^{-x} x^2 + 2 \int \underbrace{e^{-x}}_{f'} \cdot x \, dx$$

$$= -e^{-x} x^2 + 2\left[-e^{-x} \cdot x - \int (-e^{-x}) \cdot 1 \, dx\right]$$

$$= -e^{-x} x^2 - 2e^{-x} x + 2 \int e^{-x} dx$$

$$= -e^{-x} x^2 - 2e^{-x} x - 2e^{-x} + C.$$

---

4) Non sempre l'integrazione per parti è il metodo più rapido.

$$\int \underbrace{\sin x}_{y} \underbrace{\cos x \, dx}_{dy} \qquad y = \sin x, \quad dy = \cos x \, dx$$

$$= \int y \, dy = \frac{1}{2} y^2 + C = \frac{1}{2} \sin^2 x + C.$$

Che succede se integriamo per parti?

$$\int \underbrace{\sin x}_{f'} \cos x \, dx = (-\cos x) \cos x - \int (-\cos x)(-\sin x) \, dx$$

$$= -\cos^2 x - \int \sin x \cos x \, dx$$

Da cui

$$2 \int \sin x \cos x \, dx = -\cos^2 x + C$$

cioè $\int \operatorname{sen} x \cos x = -\frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{C}{2}$

Notiamo che il risultato è lo stesso di prima

$$-\frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{c}{2} = -\frac{1}{2}(1-\sin^2 x) + \frac{c}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{c}{2}$$

$= C'$ (costante)

---

5) $$\int \log x \, dx = \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \log x \, dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= x \log x - \int 1 \, dx =$$

$$= x \log x - x + C.$$

6) $$\int \arctan x \, dx = \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \arctan x \, dx$$

$$= x \arctan x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx$$

$$= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + C.$$

7) $$\int \underbrace{x^7}_{f'} \log x \, dx = \frac{1}{8} x^8 \log x - \frac{1}{8} \int x^8 \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \frac{1}{8} x^8 \log x - \frac{1}{8} \int x^7 \, dx$$

$$= \frac{1}{8} x^8 \log x - \frac{1}{64} x^8 + C.$$

10) $$\int \underbrace{e^{3x}}_{f'} \sin(2x) \, dx = \frac{1}{3} e^{3x} \sin(2x) - \int \frac{1}{3} e^{3x} \cos(2x) \cdot 2 \, dx$$

$$= \frac{1}{3} e^{3x} \operatorname{sen}(2x) - \frac{2}{3} \int \underbrace{e^{3x}}_{f'} \cos(2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{3} e^{3x} \operatorname{sen}(2x) - \frac{2}{3} \left[\frac{1}{3} e^{3x} \cos(2x) - \int \frac{1}{3} e^{3x} \left(-\sin(2x) \cdot 2\right) dx \right]$$

$$= \frac{1}{3} e^{3x} \sin(2x) - \frac{2}{9} e^{3x} \cos(2x) - \frac{4}{9} \int e^{3x} \operatorname{sen}(2x)\, dx$$

$$\overbrace{\left(1 + \frac{4}{9}\right)}^{\frac{13}{9}} \int e^{3x} \operatorname{sen}(2x)\, dx = \frac{1}{3} e^{3x} \operatorname{sen}(2x) - \frac{2}{9} e^{3x} \cos(2x) + C$$

$$\int e^{3x} \operatorname{sen}(2x)\, dx = \frac{3}{13} e^{3x} \operatorname{sen}(2x) - \frac{2}{13} e^{3x} \cos(2x) + C.$$