

REGOLE di INTEGRAZIONE ELEMENTARE

$$(I_1) \int f'(x) (f(x))^\alpha dx = \frac{(f(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \text{per } \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$(I_2) \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$$

$$(I_3) \int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2} dx = \arctan f(x) + c$$

Q: Come si verificano le identità precedenti?

A: Si deriva il II membro (il termine a destra dell'uguale) e, applicando la regola della catena, si ottiene la funzione integranda e I membro

Ad esempio

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \right) &= \frac{1}{\alpha+1} \frac{d}{dx} (f(x))^{\alpha+1} + \underbrace{\frac{d}{dx} c}_{=0} = \frac{1}{\alpha+1} (\alpha+1) (f(x))^{\alpha+1-1} f'(x) \\ &= (f(x))^\alpha f'(x) \rightarrow \text{funzione integranda in } (I_1) \end{aligned}$$

Integrazione delle FUNZIONI RAZIONALI

Siano $A(x), B(x)$ funzioni polinomiali di grado n e m rispettivamente

Vediamo calcolare l'integrale indefinito della FUNZIONE RAZIONALE $\frac{A(x)}{B(x)}$

Se $n = \deg A \geq \deg B = m$ effettuiamo la divisione tra polinomi ottenendo un quoziente $Q(x)$ e un resto $R(x)$

- $A(x) = Q(x)B(x) + R(x)$
- $\deg R < \deg B$ oppure $R(x) = 0$

$$\begin{aligned} \int \frac{A(x)}{B(x)} dx &= \int \frac{Q(x)B(x) + R(x)}{B(x)} dx = \int \left[Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)} \right] dx \\ &= \int Q(x) dx + \int \frac{R(x)}{B(x)} dx \\ &\quad \downarrow \\ &\quad Q \text{ è un polinomio} \\ &\quad \text{questo integrale è facile!} \end{aligned}$$

A meno di una divisione tra polinomi possiamo sempre supporre che il grado del numeratore $A(x)$ sia strettamente minore del grado del denominatore $B(x)$

Denominatore di grado 1 Siano $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$

$$\int \frac{\alpha}{ax+b} dx = \alpha \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\alpha}{a} \int \frac{a}{ax+b} dx = \frac{\alpha}{a} \ln |ax+b| + \text{costante}$$

(I₂)

$$\begin{aligned} f(x) &= ax+b \\ f'(x) &= a \end{aligned}$$

Denominatore di grado 2 Siano $a, b, c, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$

$$\int \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} dx \quad \text{integrale indefinito con numeratore di grado 2}$$

La strategia per calcolare questo integrale indefinito dipende dalle radici del denominatore

Caso $\Delta > 0$

Il denominatore ammette due radici reali e distinte $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
pertanto possiamo riscrivere il denominatore come segue

$$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

utilizziamo il METODO di DECOMPOSIZIONE in FRATTI SEMPLICI

cioi determiniamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali da

$$\frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} = \frac{A(x-x_2) + B(x-x_1)}{(x-x_1)(x-x_2)} \Leftrightarrow \frac{\alpha x + \beta}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{(A+B)x - (x_1A + x_2B)}{(x-x_1)(x-x_2)}$$

$$\Leftrightarrow \alpha x + \beta = a(A+B)x - a(x_1A + x_2B)$$

il PRINCIPIO di IDENTITA' tra POLINOMI ci dice che due polinomi sono uguali se hanno gli stessi coefficienti

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(A+B) = \alpha \\ -a(x_1A + x_2B) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B = \frac{\alpha}{a} \\ x_1A + x_2B = -\frac{\beta}{a} \end{cases}$$

sistema 2×2 nelle incognite A, B

concludiamo da (*) che

$$\int \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} dx = \int \left[\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} \right] dx = A \int \frac{1}{x-x_1} dx + B \int \frac{1}{x-x_2} dx$$
$$= A \ln|x-x_1| + B \ln|x-x_2| + \text{costanti}$$

Caso $\Delta = 0$

Il denominatore ammette una radice reale doppia $x_1 = -\frac{b}{2a}$

$$\text{dunque } ax^2 + bx + c = a(x-x_1)^2$$

anche in questo caso applichiamo il metodo di decomposizione in fratti semplici, tuttavia alla radice x_1 devono corrispondere due fratti (x_1 ha molteplicità 2)

Cerchiamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali da

$$\frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{(x-x_1)^2} \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} = \frac{A(x-x_1) + B}{a(x-x_1)^2} \Leftrightarrow \frac{\alpha x + \beta}{a(x-x_1)^2} = \frac{Ax + B - x_1A}{(x-x_1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha x + \beta = aAx + a(B - x_1A) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = aA \\ B = a(B - x_1A) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{\alpha}{a} \\ B - x_1A = \frac{\beta}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{\alpha}{a} \\ B = \frac{x_1\alpha}{a} + \frac{\beta}{a} = \frac{x_1\alpha + \beta}{a} \end{cases}$$

Utilizzando (**)

$$\begin{aligned} \int \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} dx &= \int \left[\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{(x-x_1)^2} \right] dx \\ &= A \int \frac{1}{x-x_1} dx + B \int \frac{1}{(x-x_1)^2} dx \\ &= A \ln|x-x_1| + B \int \frac{1}{(x-x_1)^2} dx = A \ln|x-x_1| + B \frac{(x-x_1)^{-1}}{-1} + \text{costanti} \\ &= A \ln|x-x_1| - \frac{B}{x-x_1} + \text{costanti} \end{aligned}$$

(I₁) con $f(x) = x - x_1$
 $f'(x) = 1$
 $\alpha = -2$

Caso $\Delta < 0$

In questo caso il denominatore ammette due radici complesse e coniugate

$$z_{1/2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \alpha_1 \pm i\beta_1 \quad \text{dove} \quad \alpha_1 = -\frac{b}{2a}$$

$$\beta_1 = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Pertanto possiamo riscrivere il denominatore come segue

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x-z_1)(x-z_2) = a(x-(\alpha_1 + i\beta_1))(x-(\alpha_1 - i\beta_1)) \\ &= a(x-\alpha_1 - i\beta_1)(x-\alpha_1 + i\beta_1) = a[(x-\alpha_1)^2 - (i\beta_1)^2] \\ &= a[(x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2] = a\beta_1^2 \left[\frac{(x-\alpha_1)^2}{\beta_1^2} + 1 \right] = a\beta_1^2 \left[\left(\frac{x-\alpha_1}{\beta_1} \right)^2 + 1 \right] \end{aligned}$$

equivalentemente

$$ax^2 + bx + c = a \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)^2 \left[\left(\frac{x + \frac{b}{2a}}{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}} \right)^2 + 1 \right] = -\frac{\Delta}{4a} \left[\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} \right)^2 + 1 \right]$$

Determiniamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali da

$$\frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} = \frac{A(2ax+b) + B}{ax^2 + bx + c} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} = \frac{2aAx + bA + B}{ax^2 + bx + c}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2aA = \alpha \\ bA + B = \beta \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{\alpha}{2a} \\ B = \beta - bA = \beta - \frac{b\alpha}{2a} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} dx &= A \int \frac{2ax+b}{ax^2 + bx + c} dx + B \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx \\ &= A \ln|ax^2 + bx + c| + B \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx \end{aligned}$$

(I₂)
 $f(x) = ax^2 + bx + c$
 $f'(x) = 2ax + b$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx &= \int \frac{1}{a\beta_1^2 \left[\left(\frac{x-\alpha_1}{\beta_1} \right)^2 + 1 \right]} dx = \frac{1}{a\beta_1^2} \int \frac{\frac{1}{\beta_1}}{\left(\frac{x-\alpha_1}{\beta_1} \right)^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{a\beta_1^2} \arctan \left(\frac{x-\alpha_1}{\beta_1} \right) + \text{costanti} \end{aligned}$$

(I₃)
 $f(x) = \frac{x-\alpha_1}{\beta_1}$
 $f'(x) = \frac{1}{\beta_1}$

$$= \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \arctan \left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} \right) + \text{costanti}$$

concludiamo che $\int \frac{ax+b}{ax^2+bx+c} dx = A \ln |ax^2+bx+c| + \frac{2B}{\sqrt{\Delta}} \arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right) + \text{costanti}$

Esempi con denominatore di grado 1

$$1) \int \frac{1}{2x+3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2}{2x+3} dx = \frac{1}{2} \ln |2x+3| + c$$

$$2) \int \frac{1}{2-5x} dx = -\frac{1}{5} \int \frac{-5}{2-5x} dx = -\frac{1}{5} \ln |2-5x| + c$$

$$3) \int \frac{x^3}{x+1} dx$$

facciamo la divisione tra polinomi oppure applichiamo la regola di Ruffini

x^3	$x+1$
$x^3 + x^2$	$x^2 - x + 1$
$\equiv -x^2$	$\underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{quoziente}}$
$-x^2 - x$	
$\equiv x$	
$x+1$	
$\equiv -1$	
$\underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{resto}}$	

-1	1	0	0	0
$\swarrow$		-1	1	-1
$\underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{divisione per } x+1}$	1	-1	1	-1
	$\underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{coefficienti del quoziente}}$			$\underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{resto}}$

$$\int \frac{x^3}{x+1} dx = \int \left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln |x+1| + c$$

Esempi con denominatore di grado 2

$$1) \int \frac{-x+5}{2x^2+x-1} dx$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9 \quad x_{1/2} = \frac{-1 \pm 3}{4} < \frac{-1}{2}$$

$$2x^2+x-1 = 2(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right) = (x+1)(2x-1)$$

determiniamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{-x+5}{2x^2+x-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-1} = \frac{A(2x-1) + B(x+1)}{(x+1)(2x-1)} = \frac{(2A+B)x - A+B}{2x^2+x-1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2A+B = -1 \\ -A+B = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A+5+A = -1 \\ B = 6+A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3A = -6 \\ B = 5+A \end{cases}$$

principio di identità tra polinomi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 5-2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{-x+5}{2x^2+x-1} dx &= \int \left(\frac{-2}{x+1} + \frac{3}{2x-1}\right) dx = -2 \ln |x+1| + \frac{3}{2} \int \frac{2}{2x-1} dx \\ &= -2 \ln |x+1| + \frac{3}{2} \ln |2x-1| + c \end{aligned}$$

$$2) \int_{-1}^1 \frac{3x}{x^2+2x+5} dx$$

cominciamo calcolando l'antipolo indefinito

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16 < 0$$

il denominatore ha radici complesse coniugate

$$z_{1/2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$$

$$x^2 + 2x + 5 = (x - z_1)(x - z_2) = (x + 1 - 2i)(x + 1 + 2i) = (x+1)^2 + 4$$

$$= 4 \left[\left(\frac{x+1}{2} \right)^2 + 1 \right]$$

cerchiamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$3x = A(2x+2) + B$$

$$\Leftrightarrow 3x = 2Ax + 2A + B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2A = 3 \\ 2A + B = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{2} \\ B = -2A = -3 \end{cases}$$

$$\int \frac{3x}{x^2+2x+5} dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+2) - 3}{x^2+2x+5} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx - 3 \int \frac{1}{x^2+2x+5} dx$$

$$= \frac{3}{2} \ln(x^2+2x+5) - \frac{3}{2} \int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1} dx$$

$$= \frac{3}{2} \ln(x^2+2x+5) - \frac{3}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + c = \frac{3}{2} \left(\ln(x^2+2x+5) - \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) \right) + c$$

Applichiamo il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\int_{-1}^1 \frac{3x}{x^2+2x+5} dx = \frac{3}{2} \left(\ln(x^2+2x+5) - \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) \right) \Big|_{-1}^1$$

$$= \frac{3}{2} \left(\ln 8 - \arctan 1 - \ln 4 + \arctan 0 \right)$$

$$= \frac{3}{2} \left(3 \ln 2 - \frac{\pi}{4} - 2 \ln 2 \right) = \frac{3}{2} \left(\ln 2 - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$3) \int_1^2 \frac{-4x^3 - 4x^2 + 7x + 2}{4x^2 + 8x + 3} dx$$

cominciamo con la divisione tra polinomi (il numeratore ha grado 3 mentre il denominatore ha grado 2)

$-4x^3 - 4x^2 + 7x + 2$	$4x^2 + 8x + 3$
$-4x^3 - 8x^2 - 3x$	$-x + 1$
$// \quad 4x^2 + 10x + 2$	
$\quad 4x^2 + 8x + 3$	
$\quad // \quad 2x - 1$	

$$\int \frac{-4x^3 - 4x^2 + 7x + 2}{4x^2 + 8x + 3} dx = \int \left(-x + 1 + \frac{2x-1}{4x^2+8x+3} \right) dx = -\frac{x^2}{2} + x + \int \frac{2x-1}{4x^2+8x+3} dx$$

$$\Delta = 64 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 64 - 48 = 16 > 0$$

$$x_{1/2} = \left\langle -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \quad \text{radici reali e distinte}$$

partendo da $4x^2 + 8x + 3 = 4(x + \frac{3}{2})(x + \frac{1}{2}) = (2x+3)(2x+1)$

determiniamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{2x-1}{4x^2+8x+3} = \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{2x+1} = \frac{A(2x+1) + B(2x+3)}{(2x+3)(2x+1)}$$

$$= \frac{2(A+B)x + A+3B}{4x^2+8x+3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(A+B) = 2 \\ A+3B = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B = 1 \\ A+3B = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2B = -2 \\ A = 1-B \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = -1 \\ A = 2 \end{cases}$$

decomposizione in fratti semplici

$$\int \frac{2x-1}{4x^2+8x+3} dx = \int \frac{2}{2x+3} dx - \frac{1}{2} \int \frac{2}{2x+1} dx$$

$$= \ln|2x+3| - \frac{1}{2} \ln|2x+1| + C$$

$$\int \frac{-4x^3 - 6x^2 + 7x + 2}{4x^2 + 8x + 3} dx = -\frac{x^2}{2} + x + \ln|2x+3| - \frac{1}{2} \ln|2x+1| + C$$

per il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\int_1^2 \frac{-4x^3 - 6x^2 + 7x + 2}{4x^2 + 8x + 3} dx = \left. -\frac{x^2}{2} + x + \ln(2x+3) - \frac{1}{2} \ln(2x+1) \right|_1^2$$

$$= -\cancel{2} + \cancel{2} + \ln 7 - \frac{1}{2} \ln 5 - \left(-\frac{1}{2} + 1 + \ln 5 - \frac{1}{2} \ln 3 \right)$$

$$= -\frac{1}{2} + \ln 7 - \frac{3}{2} \ln 5 + \frac{1}{2} \ln 3$$

4) $\int \frac{x}{9x^2-6x+1} dx = \int \frac{x}{(3x-1)^2} dx$

troviamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{x}{(3x-1)^2} = \frac{A}{3x-1} + \frac{B}{(3x-1)^2} = \frac{A(3x-1) + B}{(3x-1)^2} = \frac{3Ax - A + B}{(3x-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3A = 1 \\ -A + B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = A = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\int \frac{x}{(3x-1)^2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{3x-1} dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{(3x-1)^2} dx$$

$$= \frac{1}{9} \int \frac{3}{3x-1} dx + \frac{1}{9} \int 3(3x-1)^{-2} dx$$

$$= \frac{1}{9} \ln|3x-1| + \frac{1}{9} \frac{(3x-1)^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{9} \ln|3x-1| - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3x-1} + C$$

$$5) \int \frac{x}{9x^2+12x+20} dx$$

$$\frac{\Delta}{4} = 36 - 180 = -144 = -12^2 < 0$$

Le radici complesse coniugate del denominatore sono $z_{1/2} = \frac{-6 \pm 12i}{9} = \frac{-2 \pm 4i}{3}$
ci riscriviamo il denominatore come somma di quadrati

$$\begin{aligned} 9x^2+12x+20 &= 9\left(x + \frac{2}{3} - \frac{4}{3}i\right)\left(x + \frac{2}{3} + \frac{4}{3}i\right) \\ &= (3x+2-4i)(3x+2+4i) = (3x+2)^2 + 4 \\ &= 4\left[\left(\frac{3x+2}{2}\right)^2 + 1\right] \end{aligned}$$

determiniamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali da

$$x = A(18x+12) + B \Leftrightarrow x = 18Ax + 12A + B \Leftrightarrow \begin{cases} 18A = 1 \\ 12A + B = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{18} \\ B = -12A = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{9x^2+12x+20} dx &= \int \frac{\frac{1}{18}(18x+12) - \frac{2}{3}}{9x^2+12x+20} dx \\ &= \frac{1}{18} \int \frac{18x+12}{9x^2+12x+20} dx - \frac{2}{3} \int \frac{1}{4\left[\left(\frac{3x+2}{2}\right)^2 + 1\right]} dx \\ &= \frac{1}{18} \ln(9x^2+12x+20) - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \int \frac{\frac{3}{2}}{\left(\frac{3x+2}{2}\right)^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{18} \ln(9x^2+12x+20) - \frac{1}{9} \arctan\left(\frac{3x+2}{2}\right) + C \end{aligned}$$