

email : alesandro.palmieri@uniba.it

ufficio : Dipartimento di Matematica - II piano stanza 35

ricevimento: su appuntamento il venerdì pomeriggio

Proprietà fondamentali per le EQUAZIONI

- $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$ LEGGE di ANNULAMENTO del PRODOTTO
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c$

Proprietà fondamentali per le DISEQUAZIONI

- $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ (compatibilità $\leq$ con $+$)
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \wedge c > 0 \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$ (compatibilità $\leq$ con $\cdot$)
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \wedge c < 0 \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot c$

REGOLA dei SEGNI: dato il prodotto di più numeri reali non nulli allora se il numero di fattori negativi è dispari il prodotto è negativo, mentre se non ci sono fattori negativi oppure sono in numero pari allora il prodotto è positivo

Equazioni e disequazioni di I grado

$$\begin{aligned}
 1) \quad 2x - 5 &= 3x + 4 + x & \Leftrightarrow & 2x - 5 = 4x + 4 \\
 & & \Leftrightarrow & -2x - 5 = -2x + 4x + 4 \\
 & & \Leftrightarrow & -5 = 2x + 4 & \Leftrightarrow & -9 = 2x \\
 & & \Leftrightarrow & x = -\frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad -3x &\leq -6 & \Rightarrow & x \geq (-\frac{1}{3}) \cdot (-6) = 2 \\
 & \text{moltiplichiamo} & & \\
 & \text{per } -\frac{1}{3} & &
 \end{aligned}$$

$$3) \quad -x - 1 > 0 \Rightarrow -1 > x \Leftrightarrow x < -1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1)$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad \frac{3}{2}x + \frac{7}{3} - x + \frac{5}{6} &\geq -\frac{5}{8}x + \frac{11}{3} & \Leftrightarrow & \frac{3}{2}x - x + \frac{5}{6}x \geq \frac{11}{3} - \frac{7}{3} - \frac{5}{6} \\
 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2} - 1 + \frac{5}{6}\right) \cdot x &\geq \frac{2 \cdot 11 - 2 \cdot 7 - 5}{6} & \Leftrightarrow & \frac{3 \cdot 4 - 8 + 5}{8} x \geq \frac{22 - 14 - 5}{6} \\
 \Leftrightarrow \frac{9}{8}x &\geq \frac{3}{6} = \frac{1}{2} & \Leftrightarrow & x \geq \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{9}
 \end{aligned}$$

$$5) \quad -2x \geq \frac{2^{2023} - 2^{2021}}{42 \cdot 2^{2019}}$$

proprietà delle potenze :

$$\begin{aligned}
 a^x \cdot a^y &= a^{x+y} \\
 a^x / a^y &= a^{x-y} \\
 (a^x)^y &= a^{x \cdot y} \\
 a^x \cdot b^x &= (a \cdot b)^x \\
 a^x / b^x &= (a/b)^x
 \end{aligned}$$

$$-2x \geq \frac{2^{2021}(2^2-1)}{12 \cdot 2^{2019}} = \frac{3}{12} \cdot \frac{2^{2021}}{2^{2019}} = \frac{3}{12} \cdot 2^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow -2x \geq 1 \quad \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2}$$

$$6) -10x + 2 + 13x < 3x + \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow 2 < \frac{\pi}{2} \text{ false}$$

l'insieme delle soluzioni è $\emptyset$

Equazioni di II grado

Ricordiamo come si risolvono le equazioni di II grado in $\mathbb{R}$: prima di ricavare le formule risolutive dobbiamo definire la radice quadrata di un numero reale non negativo.

Teorema (esistenza della radice quadrata)

$\forall a \geq 0 \exists! b \geq 0$ tale che $a = b^2$

L'unico $b \geq 0$ tale che $b^2 = a$ si dice RADICE QUADRATA di a e si denota $\sqrt{a} := b$.

Osservazione Aggiungendo il risultato precedente sia vero dobbiamo lavorare con i numeri reali: infatti $\exists q \in \mathbb{Q}$ tale che $q^2 = 2$.

Osservazione La radice quadrata di $a \geq 0$ è per definizione un numero ≥ 0 . Tuttavia se $\sqrt{a} = b$, cioè se $b \geq 0$ e $a = b^2$ allora anche $-b$ soddisfa la stessa proprietà di b , infatti $(-b)^2 = b^2 = a$. Concludiamo che se $a > 0$ allora esistono due numeri reali $\sqrt{a}, -\sqrt{a}$ il cui quadrato è a .

Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ parametri fissati, con $a \neq 0$.

Determiniamo le soluzioni dell'equazione di II grado

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 &\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 &\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} &= 0 \\ &&\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} &= 0 \\ &&\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \end{aligned}$$

introduciamo la notazione $\Delta = b^2 - 4ac$ (DELTA o DISCRIMINANTE dell'equazione)

Se $\Delta \geq 0$ per risolvere l'equazione $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ dobbiamo calcolare le radici quadrate di $\frac{\Delta}{4a^2}$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\uparrow$
se $\Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Se invece $\Delta < 0$ l'equazione non ammette soluzioni reali poiché

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
numero reale ≥ 0 numero reale < 0

Ricapitolando: data un'equazione di II grado $ax^2 + bx + c = 0$

si calcola il DELTA (DISCRIMINANTE) $\Delta = b^2 - 4ac$ e si distinguono tre casi:

- Se $\Delta > 0$ l'equazione ammette due soluzioni reali distinte

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Se $\Delta = 0$ l'equazione ammette una radice reale $x = -\frac{b}{2a}$

- Se $\Delta < 0$ l'equazione non ammette radici reali

Il grafico della curva $y = ax^2 + bx + c$ (quando $a \neq 0$) è una PARABOLA con asse di simmetria parallelo all'asse y (la retta di equazione $x = -\frac{b}{2a}$) e vertice $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$.

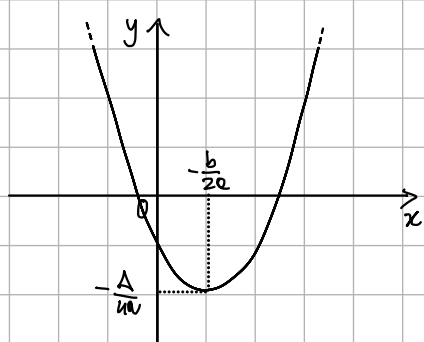
Risolvere l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ significa quindi cercare l'intersezione della parabola con l'asse x , l'equazione precedente si può equivalentemente risolvere come soluzione del sistema
$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c & (\text{parabola}) \\ y = 0 & (\text{asse } x) \end{cases}$$

Ricordiamo inoltre che per $a > 0$ la parabola è rivolta verso l'alto, mentre per $a < 0$ la parabola è rivolta verso il basso.

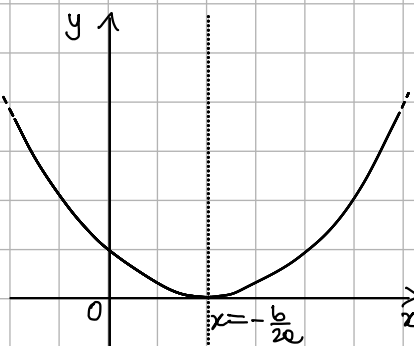
Pertanto la condizione $\Delta > 0$ significa che la parabola interseca l'asse x in due punti distinti, la condizione $\Delta = 0$ significa che la parabola interseca l'asse x nel vertice, mentre per $\Delta < 0$ la parabola non interseca l'asse x (per $a > 0$ la parabola si trova al di sopra dell'asse x , mentre per $a < 0$ si trova al di sotto).

Disuguaglianze di II grado

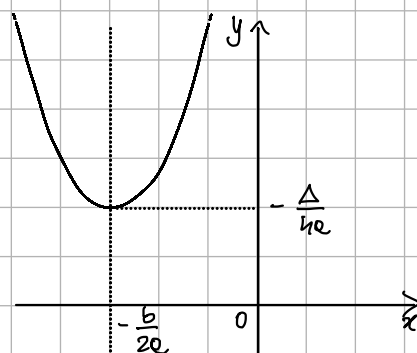
caso $a > 0, \Delta > 0$



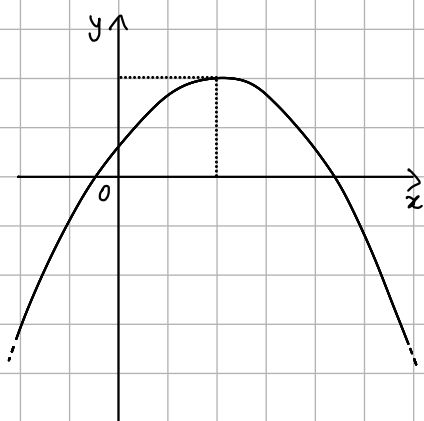
caso $a > 0, \Delta = 0$



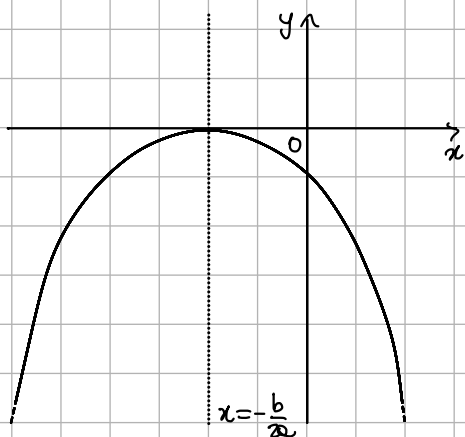
caso $a > 0, \Delta < 0$



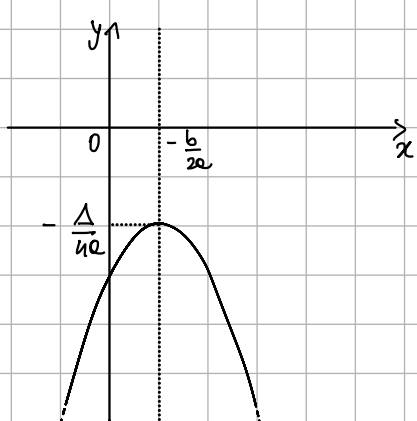
caso $a < 0, \Delta > 0$



caso $a < 0, \Delta = 0$



caso $a < 0, \Delta < 0$



In particolare dai grafici precedenti ricaviamo gli insiemi delle soluzioni per le disuguaglianze di II grado. Per brevità scriveremo esplicitamente le soluzioni solo nel caso $a > 0$ (il caso $a < 0$ si considera in maniera analoga, oppure ci si riconduce al caso $a > 0$ moltiplicando la disuguaglianza per -1 , ricordandosi di invertire il verso della disuguaglianza).

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \vee x \geq \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} & \text{se } \Delta > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} & \text{se } \Delta \leq 0 \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \vee x > \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} & \text{se } \Delta > 0 \\ x \neq -\frac{b}{2a} & \text{se } \Delta = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} & \text{se } \Delta < 0 \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \leq x \leq \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} & \text{se } \Delta > 0 \\ x = -\frac{b}{2a} & \text{se } \Delta = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} & \text{se } \Delta < 0 \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} < x < \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} & \text{se } \Delta > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} & \text{se } \Delta \leq 0 \end{cases}$$

$$1) \quad 16x^2 + 24x + 9 = 0 \quad (=) \quad (4x+3)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x+3=0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{3}{4}$$

$$\Delta = 4 \cdot 16 \cdot 4 - 4 \cdot 16 \cdot 9 = 0$$

$$2) \quad x^2 - 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \vee x-4=0 \\ \Leftrightarrow \quad x=0 \vee x=4$$

$$3) \quad x^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 2$$

$$4) \quad x^2 - 3 < 0$$

l'equazione associata $x^2 - 3 = 0$, questa ammette le radici $\pm\sqrt{3}$

$$-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$$

$$\text{ATTENZIONE: } x^2 < 3 \Rightarrow x < \pm 3$$



NON ha senso!

$$5) \quad x^2 - x - 6 \geq 0$$

$$(x-3)(x+2)$$

equazione associata

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{matrix} 3 \\ -2 \end{matrix}$$

l'insieme delle soluzioni:

$$x \leq -2 \vee x \geq 3$$

$$6) \quad -2x^2 + 5x > 0$$

eq. associata

$$-2x^2 + 5x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(5-2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x > 0 \vee x = \frac{5}{2}$$

l'insieme delle soluzioni $0 < x < \frac{5}{2}$

$$\text{alternativamente: } -2x^2 + 5x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 5x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < \frac{5}{2}$$

$$7) \quad -x^2 + 5 \leq 0 \quad \text{l'eq. associata è } x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$$

$$\Downarrow \\ x \leq -\sqrt{5} \vee x \geq \sqrt{5}$$



$$8) \quad x^2 - 4x + 4 > 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 2$$

$$9) \quad x^2 + 6x + 9 \leq 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = -3$$

Definizione Un polinomio è un'espressione del tipo

$$P(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m = \sum_{k=0}^m a_k x^{m-k}$$

con $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, a_m$ sono costanti numeriche
x indeterminata

Se $a_0 \neq 0$ si dice che m è il grado del polinomio $P(x)$ e si scrive $m = \deg P$
 Se $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Z}$ allora $P(x)$ si dice polinomio a coefficienti interi
 Se $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Q}$ allora $P(x)$ si dice polinomio a coefficienti razionali
 Se $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ allora $P(x)$ si dice polinomio a coefficienti reali

Osservazione I polinomi di grado 0 sono le costanti non nulle

Sull'insieme dei polinomi sono definite due operazioni: somma e prodotto

Esempio

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 10$$

$$Q(x) = 2x^5 + x^3 - 4x^2 + x - 8$$

$$P(x) + Q(x) = 2x^5 + x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x + 2$$

Esempio

$$P(x) = x^3 - x + 2$$

$$Q(x) = x^2 + 2x + 3$$

$$P(x) \cdot Q(x) = (x^3 - x + 2) \cdot (x^2 + 2x + 3) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 - x^3 - 2x^2 - 3x + 2x^2 + 4x + 6$$

$$= x^5 + 2x^4 + 2x^3 + x + 6$$

Definizione Sia $P(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^{m-k}$ un polinomio e sia α un numero
 Diciamo che α è una RADICE di $P(x)$ se $P(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m = 0$

Teorema di Ruffini

Siano $P(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m$ polinomio e α un numero
 Allora α è una radice di $P(x) \Leftrightarrow x - \alpha$ divide $P(x)$

Osservazione Siano $a(x), b(x)$ polinomi di grado $\deg a \geq \deg b \geq 1$

Forse la divisione tra $a(x)$ e $b(x)$ significa trovare due polinomi $q(x)$ e $r(x)$ (detti rispettivamente QUOZIENTE e RESTO) tali che

- i) $a(x) = b(x)q(x) + r(x)$
- ii) $\deg r < \deg b$ oppure $r(x) = 0$

Nel caso in cui $r(x) = 0$ si dice che $b(x)$ divide $a(x)$

Esempi

$$a(x) = x^4 + 2x^3 + x + 6$$

$$b(x) = x^2 + 3$$

$x^4 + 2x^3 + x + 6$	$x^2 + 3$
$x^4 + 2x^3$	$x^2 + 2x - 3$
$2x^3 - 3x^2 + x + 6$	$\underbrace{x^2 + 2x - 3}_{\text{quoziente}}$
$2x^3 + 6x$	
$-3x^2 - 5x + 6$	
$-3x^2 - 9$	
$-5x + 15$	
$\underbrace{-5x + 15}_{\text{resto}}$	

$$q(x) = x^2 + 2x - 3$$

$$r(x) = -5x + 15$$

esercizio x casa:

controllare che

$$a(x) = b(x)q(x) + r(x)$$

Proposizione Sia $p(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m$ polinomio di grado n a coefficienti interi ($a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Z}$ e $a_0 \neq 0$).

Se $q = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ con r, s coprimi e radice di $p(x)$ allora

i) r divide a_m

ii) s divide a_0

Esercizio

$$1) \quad x^3 - 6x^2 - 8x - 1 > 0$$

$$p(x) = x^3 - 6x^2 - 8x - 1$$

per la proposizione precedente se ci sono radici razionali sono nell'insieme $\{\pm 1\}$

$$p(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 - 1 = 1 - 6 - 8 - 1 \neq 0$$

$\Rightarrow 1$ non è radice di $p(x)$

$$p(-1) = (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 - 8 \cdot (-1) - 1 = -1 - 6 + 8 - 1 = 0$$

$\Rightarrow -1$ è radice di $p(x)$

$\Rightarrow x+1$ divide $p(x)$

$x^3 - 6x^2 - 8x - 1$	$x+1$	$x^2 - 7x - 1$
$x^3 - 6x^2 - 8x - 1$	$x^2 - 7x - 1$	0

$$q(x) = x^2 - 7x - 1$$

$$x^3 - 6x^2 - 8x - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 7x - 1) > 0$$

studio del segno

ESERCIZIO x CASA

$$2) \quad x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6 \geq 0$$

Ricordiamo la REGOLA di RUFFINI che ci permette di calcolare più efficientemente la divisione euclidea tra un polinomio $p(x)$ e il polinomio $x - \alpha$

Se $p(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m$ con $a_0, a_1, \dots, a_m \in K$ e $\alpha \in K$ allora consideriamo la seguente procedura

- Disponiamo i coefficienti di p e il numero α in tabella

coefficienti delle potenze di x in ordine decrescente (si parte dai coefficienti per il monomio di ordine superiore)

	a_0	a_1	$\dots$	a_{m-1}	a_m
α					

termine noto del polinomio

per la tabella precedente useremo la seguente nomenclatura

	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_{m-1}	a_m
α						

1^a colonna 2^a colonna m -esima colonna (penultima colonna)

→ $(m+1)$ -esima colonna (ultima colonna)

	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_{m-1}	a_m
α						

→ 1^a riga
→ 2^a riga
→ 3^a riga

- Riscontruiamo a_0 nella prima colonna dell'ultima riga

	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_{m-1}	a_m
α	$\downarrow$					
	a_0					

- Moltiplichiamo a_0 per α e scriviamo questo prodotto nella 2^a riga della 2^a colonna

	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_{m-1}	a_m
α	$\alpha \cdot a_0$					
$\times$	$\rightarrow a_0$					

- Sommiamo gli elementi della 2^a colonna e scriviamo il risultato di questa somma nella 3^a riga

	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_{m-1}	a_m
α	$\alpha \cdot a_0$					
	a_0	b_1				

$b_1 = a_1 + \alpha a_0$

- Moltiplichiamo b_1 per α e scriviamo questo prodotto nella 2^a riga della 3^a colonna, quindi sommiamo gli elementi della 3^a colonna e scriviamo il risultato di questa somma nella 3^a riga

	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_{m-1}	a_m
α		$\alpha \cdot a_0$	αb_1			
	a_0	b_1				

$b_2 = a_2 + \alpha b_1$

- Ripetiamo le operazioni fatte sulla 2^a e 3^a colonna su tutte le altre colonne (da sinistra verso destra) fino a riempire tutte le colonne della 2^a e della 3^a riga

	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_{m-1}	a_m
α		$\alpha \cdot a_0$	αb_1		αb_{m-2}	αb_{m-1}
	a_0	b_1	b_2		b_{m-1}	r

dove $b_3 = a_3 + \alpha b_2$

$\vdots$

$b_{m-1} = a_{m-1} + \alpha b_{m-2}$

$r = a_m + \alpha b_{m-1}$

Dalle tabelle precedenti ricaviamo i coefficienti del quoziente $q(x)$ e del resto r della divisione euclidea di $p(x)$ per $x - \alpha$

$$q(x) = a_0 x^{m-1} + b_1 x^{m-2} + b_2 x^{m-3} + \dots + b_{m-1} \quad \text{quoziente}$$

r resto