LEZIONE 29

venerdì 24 novembre 2023 11:15

ESERCIZIO Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \sin x - \frac{1}{2}x^2 \cos x}{\sin(2x) - 2x} \qquad \frac{0}{0} \text{ f.i.}$$

$$\sin(2x) \overset{y=2x}{=} \sin y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^3)$$
$$= 2x - \frac{(2x)^3}{6} + o((2x)^3)$$
$$= 2x - \frac{8}{6}x^3 + o(x^3)$$
$$= 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$D = \cancel{2x} - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3) - \cancel{2x} = -\frac{4}{3}x^3 + o(x^3).$$

Numeratore:

$$e^x - 1 - \sin x - \frac{1}{2}x^2 \cos x$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$x^2\cos x = x^2 \underbrace{- \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)}_{o(x^3)} = x^2 + o(x^3)$$

$$N = \cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{\tfrac{1}{2}x^2} + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - \cancel{1} - \left(\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \cancel{\tfrac{1}{2}x^2} + o(x^3)$$
$$= \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$
$$= \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

Conclusione:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{-\frac{4}{3}x^3 + o(x^3)} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$

ESERCIZIO 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x-x^3} - \frac{1}{2}x^2 - \sin x - 1}{\log^2(1+2x) - 4x^2}$$

Denominatore:

$$\log(1+2x) \overset{y=2x}{=} \log(1+y) =$$
$$= y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$
$$= 2x - 2x^2 + o(x^2)$$

$$\log^2(1+2x) = \left(2x - 2x^2 + o(x^2)\right)^2$$
$$= 4x^2 + 4x^4 + o(x^4) - 8x^3 + \underbrace{o(x^3)} + o(x^4)$$
$$= 4x^2 - 8x^3 + o(x^3)$$

$$D = 4x^2 - 8x^3 + o(x^3) - 4x^2 = -8x^3 + o(x^3).$$

Numeratore: $e^{x-x^3} - \frac{1}{2}x^2 - \sin x - 1$

$$e^{x-x^3} \overset{y=x-x^3}{=} e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + o(y^3)$$
$$= 1 + x - x^3 + \frac{1}{2}(x-x^3)^2 + \frac{1}{6}(x-x^3)^3 + o((x-x^3)^3)$$
$$= 1 + x - x^3 + \frac{1}{2}(x^2 + o(x^3)) + \frac{1}{6}(x^3 + o(x^3)) + o(x^3)$$
$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{quindi:}$$

$$N = \cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{\tfrac{1}{2}x^2} - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3) - \cancel{\tfrac{1}{2}x^2} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \cancel{1}$$
$$= -\frac{2}{3}x^3 + o(x^3).$$

Conclusione
$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{-8x^3 + o(x^3)} = \frac{-\frac{2}{3}}{-8} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{12}.$$

Attenzione: Non tutti i limiti si possono calcolare con gli sviluppi di Taylor.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}+\sin x}{\sqrt{4+e^x}}$$

Per $e^{\frac{x}{2}}$, $\sin x$, e^x non ne conosciamo lo "sviluppo" per $x\to+\infty$.

Per calcolare il limite, dobbiamo usare altri metodi:

$$\frac{e^{\frac{x}{2}}+\sin x}{\sqrt{4+e^x}} = \frac{e^{\frac{x}{2}}(1+o(1))}{\sqrt{e^x\left(\frac{4}{e^x}+1\right)}} = \frac{\cancel{e^{\frac{x}{2}}}(1+o(1))}{\cancel{e^{\frac{x}{2}}}\sqrt{\frac{4}{e^x}+1}} \xrightarrow{x\to+\infty} 1$$

ESEMPIO

$$\lim_{x\to+\infty} x^4\left(e^{\frac{1}{2x^2}}+\cos\left(\frac{1}{x}\right)-2\right)$$

$\frac{1}{2x^2}\to 0$, $\frac{1}{x}\to 0$

Per $x\to+\infty$, $y=\frac{1}{2x^2}\to 0$ (quindi si può usare lo sviluppo di e^y per $y\to 0$)

$$e^{\frac{1}{2x^2}} = e^y = 1+y+\frac{1}{2}y^2+o(y^2)$$
$$=1+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x^2}\right)^2+o\left(\left(\frac{1}{2x^2}\right)^2\right)$$
$$=1+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{8x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

$$\cos\frac{1}{x} \overset{y=\frac{1}{x}\to 0 \text{ se } x\to+\infty}{=} \cos y = 1-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{24}y^4+o(y^4)$$
$$=1-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{24x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

Quindi:

$$x^4\left(e^{\frac{1}{2x^2}}+\cos\frac{1}{x}-2\right)$$
$$=x^4\left(\cancel{1}+\cancel{\frac{1}{2x^2}}+\frac{1}{8x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)+\cancel{1}-\cancel{\frac{1}{2x^2}}+\frac{1}{24x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)-\cancel{2}\right)$$

$$= x^4 \left(\frac{1}{6} \frac{1}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{6} + o(1) \xrightarrow{x \to +\infty} \frac{1}{6}.$$

ESERCIZIO

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - x^2 - \cos^2 x}{x^2 + 2\log(\cos x)} \qquad \frac{0}{0} \ \text{f.i.}$$

Denom:

$$\log(\cos x) = \log\Big(1 \underbrace{- \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)}_{y}\Big)$$

$$= \log(1+y)$$

$$= y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)^2$$

$$+ o\left(\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4 + o(x^4)\right)$$

$$+ o(x^4)$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$$

$$D = x^2 + 2\log(\cos x) = x^2 + 2\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)\right)$$

$$= \cancel{x^2} - \cancel{x^2} - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)$$

$$= -\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)$$

Numeratore: $1 - x^2 - \cos^2 x = \sin^2 x - x^2$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 - x^2 = \cancel{x^2} - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) \cancel{- x^2}$$

$$= -\frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$$

Conclusione $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}x^4 + o(x^4)}{-\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{6}} = 2.$

Formula di Lagrange per il resto di Taylor.

Sia $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ con $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$ e $x_0 \in (a, b)$. Assumiamo f n volte derivabile in x_0.

Sia $E_n(x) = f(x) - T_n(x)$ dove $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

Teorema di Peano: $E_n(x) = o((x-x_0)^n)$ per $x \to x_0$.

TEOREMA (FORMULA DEL RESTO DI LAGRANGE)

Sia $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ con $a, b \in \mathbb{R}^*$ e $a < b$. Sia $x_0 \in (a, b)$. Assumiamo f $n+1$ volte derivabile in x_0.
Allora $\exists\, c \in (a, b)$ compreso tra x_0 ed x tal che

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

ESEMPIO

La formula possiamo approssimare numeri irrazionali ad esempio e:

$f(x) = e^x$, $x_0 = 0$.

Vogliamo calcolare $e = f(1)$.

$e = f(1) = T_n(1) + E_n(1)$ dove $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^n$

Il teorema ci dice che $\exists\, c \in [0, 1]$ t.c.

$$E_n(1) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(1-0)^n = \frac{e^c}{(n+1)!}$$

$$0 \leq E_n(1) \leq \frac{e}{(n+1)!}$$

Se $n = 5$

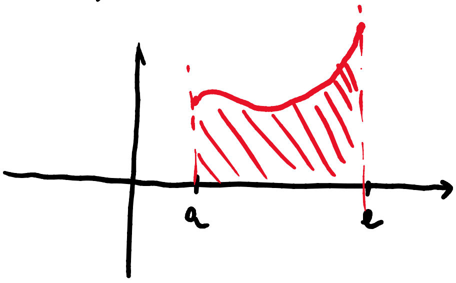
$$0 \le E_n(1) \le \frac{e}{6!} = \frac{e}{720} \le \frac{3}{720} = \frac{3}{6 \cdot 120} = \frac{1}{240} < \frac{1}{200} = 0{,}005$$

$$T_n(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = \frac{163}{60} = 2{,}71\bar{6}$$

Possiamo scrivere che $e \simeq 2{,}71\bar{6}$ con errore al più $0{,}005$.

Integrali:

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Vogliamo calcolare l'area della regione compresa tra il grafico di f e l'asse x.



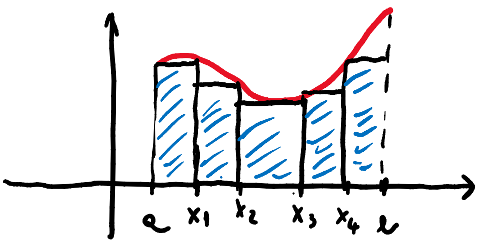
La indicheremo con

$$\int_a^b f(x)\, dx .$$

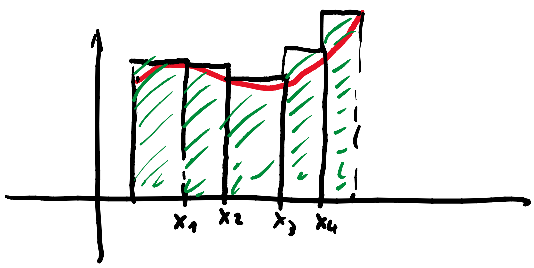
Problema 1: come definiamo l'area?

Problema 2: Come la calcoliamo?

Per definire l'area, approssimiamo la regione sotto il grafico con dei rettangoli.

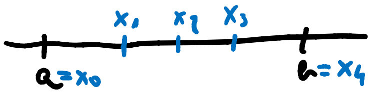


La somma delle aree di questi rettangoli è un'approssimazione dal basso dell'area che vogliamo calcolare.



Adesso la somma delle aree dei rettangoli è un'approssimazione dall'alto dell'area che vogliamo calcolare.

Def: Siano $a, b \in \mathbb{R}$, una SUDDIVISIONE DI $[a, b]$ (O PARTIZIONE) è un insieme $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ finito in cui $x_0 = a$, $x_n = b$ e $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 \dots < x_n$.



OSS Se $D = \{x_0, x_1, \dots x_n\}$ è una suddivisione di $[a, b]$ allora
$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n] = \bigcup_{k=1}^{n} [x_{k-1}, x_k]$$

Def: Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sia $D = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una suddivisione di $[a, b]$. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata in $[a, b]$. Definiamo:

1) $s(f, D) = \sum_{k=1}^{n} \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \cdot (x_k - x_{k-1})$ (SOMMA INFERIORE DI f RISPETTO A D)

2) $S(f, D) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f \cdot (x_k - x_{k-1})$ (SOMMA SUPERIORE DI f RISPETTO A D)

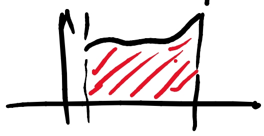
OSS Se D_1 e D_2 sono due suddivisioni, allora
$$s(f, D_1) \leq S(f, D_2)$$

Consideriamo gli insiemi:
$$I_{inf} = \{ s(f, D) \mid D \text{ suddivisione di } [a, b] \}$$
$$I_{sup} = \{ S(f, D) \mid D \text{ suddivisioni di } [a, b] \}$$

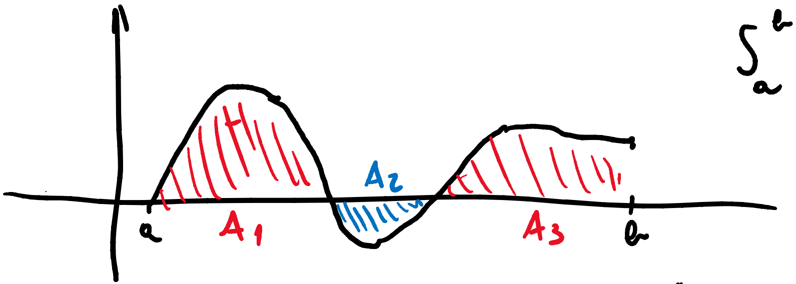
Def: Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata. Si dice che f è INTEGRABILE (SECONDO RIEMANN) in $[a, b]$ se $\sup I_{inf} = \inf I_{sup}$. In tal caso, definiamo INTEGRALE di f in $[a, b]$ la quantità:
$$\int_a^b f(x)\, dx = \sup I_{inf} = \inf I_{sup}$$

Interpretazione

Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione integrabile e $f \geq 0$ in $[a,b]$, $\int_a^b f(x)\,dx$ è l'area della regione di piano compresa tra il grafico di f e l'asse x.

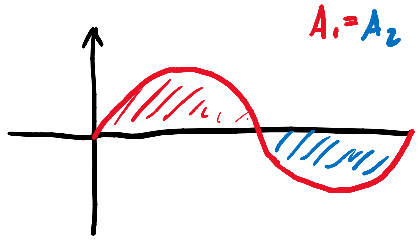


Se f cambia segno in $[a,b]$, le regioni in cui $f \leq 0$ vengono contate con segno negativo:



$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3$$

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = A_1 - A_2 = 0$$



$A_1 = A_2$

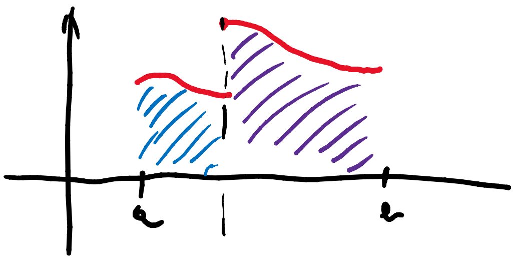
TEOREMA (INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE)

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ allora f è integrabile in $[a,b]$.

TEOREMA (INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI MONOTONE)

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ monotona in $[a,b]$ allora f è integrabile in $[a,b]$.

Nota: Si può dimostrare che se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è limitata e ha un numero finito di punti di discont. allora è integrabile.



Un esempio di funzione non integrabile è:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$