MATEMATICA - LEZIONE 25

venerdì 17 novembre 2023 10:49

ESERCIZIO

1) Studiare il grafico di $f(x) = \arctan(2x) - x$
2) Determinare i punti di massimo e minimo assoluto e locali per f nell'intervallo $[0, 3]$

1) • Dominio:

• $Dom(f) = \mathbb{R}$

• Simmetrie

$$f(-x) = \arctan(-2x) + x = -\arctan(2x) + x$$
$$= -(\arctan(2x) - x)$$
$$= -f(x)$$

Quindi f è dispari.

• Segno e zeri?

$\arctan(2x) - x > 0$? BOH

Andiamo avanti.

• Limiti / asintoti

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \arctan(2x) - x = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \arctan(2x) - x = -\frac{\pi}{2} - (-\infty) = +\infty$$

Asintoti obliqui?

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\arctan(2x)}{x} - 1 = \frac{\frac{\pi}{2}}{+\infty} - 1 = -1$$

$m = -1$

$$q = \lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to +\infty} \arctan(2x) - x - (-1)x$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \arctan(2x) = \frac{\pi}{2}$$

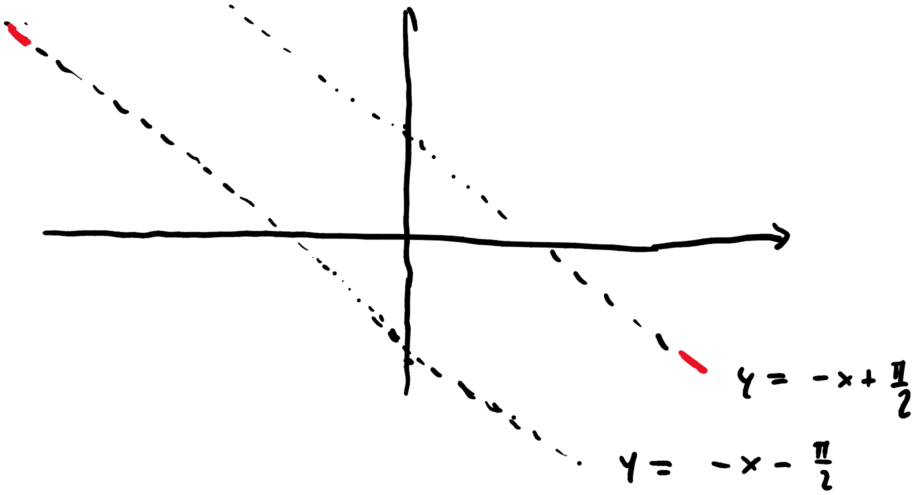
La retta $y = -x + \frac{\pi}{2}$ è un asintoto obliquo.

Per $x \to -\infty$ avremo invece che

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - (-x) = -\frac{\pi}{2}.$$

La retta $y = -x - \frac{\pi}{2}$ è as. obliquo per $x \to -\infty$.



• Derivata :

$$f(x) = \arctan(2x) - x$$

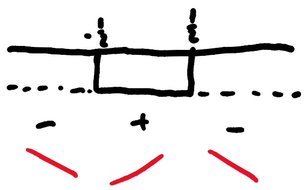
$$f'(x) = \frac{1}{1+(2x)^2} \cdot 2 - 1 = \frac{2}{1+4x^2} - 1 = \frac{2-1-4x^2}{1+4x^2}$$

$$= \frac{1-4x^2}{1+4x^2}$$

• Segno e zeri di f' :

$$f'(x) = 0 \iff 1 - 4x^2 = 0 \iff 4x^2 = 1 \iff$$
$$\iff x^2 = \frac{1}{4} \iff x = \pm \frac{1}{2}$$

$$f'(x) > 0 \iff \frac{1-4x^2}{\underbrace{1+4x^2}_{>0}} > 0 \iff 1 - 4x^2 > 0$$

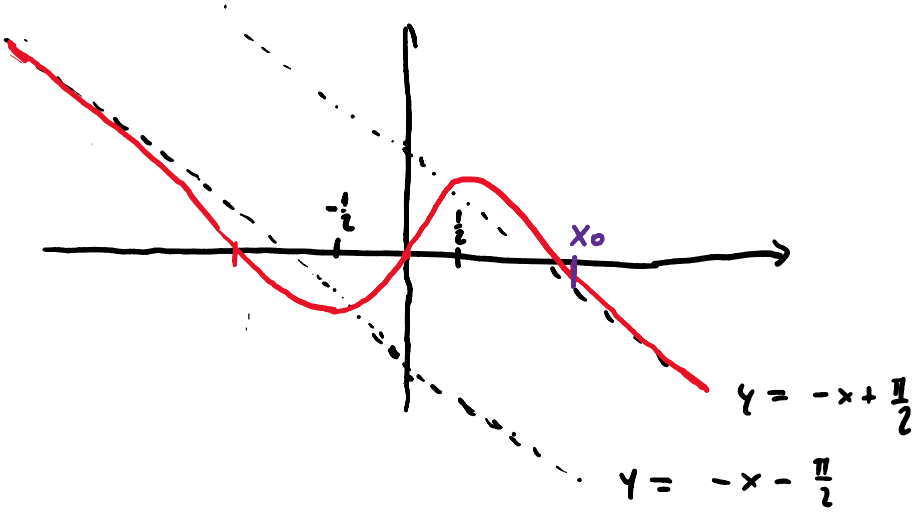


• $x = -\frac{1}{2}$ è punto di min locale e

$f(-\frac{1}{2}) = \arctan(-1) + \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} < 0$

• $x = \frac{1}{2}$ è un punto di max locale e

$f(\frac{1}{2}) = \arctan(1) - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} > 0$

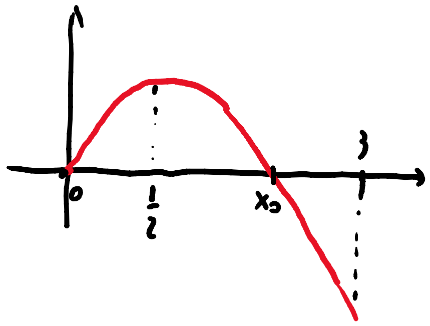


oss

$f > 0$ in $(-\infty, -x_0) \cup (0, x_0)$ dove x_0 è l'unico zero di f in $(0, +\infty)$. A posteriori abbiamo determinato il segno di f

2) Punti di max e min in $[0, 3]$

$f(3) = \arctan(6) - 3 < 0$



• $x = \frac{1}{2}$ è punto di max assoluto e $\max_{[0,3]} f = f(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

• $x = 3$ è punto di min assoluto e $f(3) = \arctan(6) - 3$.

• Punti di max locale in $[0, 3]$: $x = \frac{1}{2}$

• Punti di min locale in $[0, 3]$: $x = 0$, $x = 3$.

ESERCIZIO

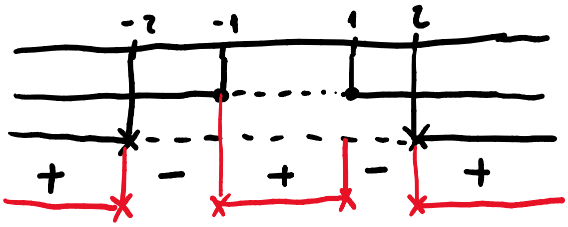
$$f(x) = |x| + 3\log\left(\frac{|x|-1}{|x|-2}\right)$$

- Dominio:

$$\frac{|x|-1}{|x|-2} > 0 \quad e \; |x| \neq 2 \qquad \text{Studio del segno:}$$

$|x|-1 \geq 0 \iff |x| \geq 1 \iff x \leq -1 \;\vee\; x \geq 1.$

$|x|-2 \geq 0 \iff |x| \geq 2 \iff x \leq -2 \;\vee\; x \geq 2$



$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$

- Simmetrie ?

$f(-x) = |-x| + 3\log\left(\frac{|-x|-1}{|-x|-2}\right) = f(x)$ f è pari.

Da ora in poi assumiamo $x \geq 0$ (cioè lavoriamo in $[0,1) \cup (2,+\infty)$)

- Segno e zeri ? $\quad f(x) = x + 3\log\left(\frac{x-1}{x-2}\right) > 0$?

BOH

Vado avanti.

- Limiti:

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 + 3\log\left(\frac{-1}{-2}\right) = 3\log\frac{1}{2} = -3\log 2.$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} x + 3\log\left(\frac{x-1}{x-2}\right) = \text{"}1 + 3\log 0\text{"} = \text{"}1 - \infty\text{"} = -\infty$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x + 3\log\left(\frac{x-1}{x-2}\right) = +\infty$

$\rightarrow \frac{1}{0^+}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x + 3 \log\left(\frac{x-1}{x-2}\right) = +\infty + 0 = +\infty.$$

In $x=1$ e $x=2$ ci sono asintoti verticali.

Cerchiamo gli asintoti obliqui:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{3 \log\left(\frac{x-1}{x-2}\right)}{x} = 1$$

$$q = \lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} 3 \log\left(\frac{x-1}{x-2}\right) = 0$$

la retta $y = x$ è asint. obliquo a $+\infty$.

- Derivata (con $x \geq 0$)

$$f(x) = x + 3 \log\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$$

$$f'(x) = 1 + 3 \frac{1}{\frac{x-1}{x-2}} \cdot \left(\frac{x-1}{x-2}\right)'$$

$$= 1 + 3 \frac{x-2}{x-1} \cdot \left(\frac{1 \cdot (x-2) - (x-1) \cdot 1}{(x-2)^2}\right)$$

$$= 1 + 3 \frac{\cancel{x-2}}{x-1} \frac{-1}{(x-2)^{\cancel{2}}}$$

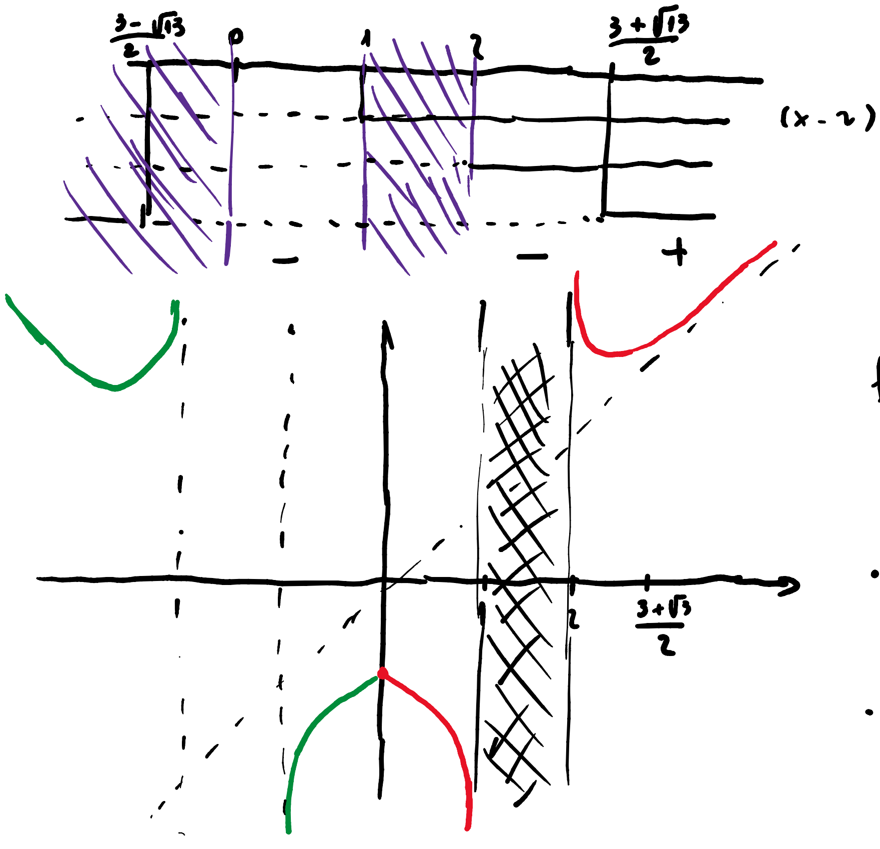
$$= 1 - \frac{3}{(x-1)(x-2)} = \frac{(x-1)(x-2) - 3}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{x^2 - x - 2x + 2 - 3}{(x-1)(x-2)} = \frac{x^2 - 3x - 1}{(x-1)(x-2)}$$

$$f'(x) = 0 \iff x^2 - 3x - 1 = 0 \iff \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \quad \vee \quad x = \frac{3-\sqrt{13}}{2} < 0$$

- Segno di f'



$f'_+(0) = -\frac{1}{2}$

OSS

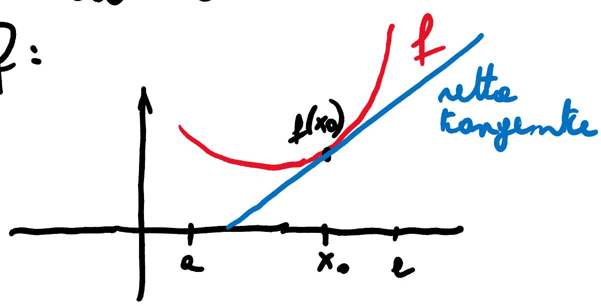
- In $x=0$ c'è un punto angoloso
- $y=-x$ è un asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

POLINOMI DI TAYOR.

Idea: Vogliamo approssimare una funzione vicino a un punto fissato x_0 con un polinomio di grado che possiamo scegliere. Vogliamo trovare il polinomio che approssima f nel miglior modo possibile.

- Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione, sia $x_0 \in I$. Qual è il polinomio di primo grado che approssima meglio f vicino a x_0?
  È quello che ha per grafico la retta tangente al grafico di f:

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



OSS 1

$T_1(x_0) = f(x_0)$

$T_1'(x) = f'(x_0)$ in particolare $T_1'(x_0) = f'(x_0)$.

T_1 è l'unico polinomio grado ≤ 1 che coincide con f in x_0 e ha la stessa derivata di f in x_0.

OSS 2 T_1 è l'unico polinomio di grado ≤ 1 che soddisfa:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_1(x)}{x - x_0} = 0$$

Proviamo ad approssimare con polinomi di grado 2.

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Questo polinomio soddisfa:

OSS 1

$$T_2'(x) = f'(x_0) \cdot 1 + f''(x_0)(x - x_0)$$

$$T_2''(x) = f''(x_0)$$

In particolare: $T_2(x_0) = f(x_0)$

$T_2'(x_0) = f'(x_0)$

$T_2''(x_0) = f''(x_0)$

OSS 2

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_2(x)}{(x - x_0)^2} = 0$$

DIM

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - T_2(x)}{(x-x_0)^2} \quad f.i. \ \frac{0}{0}$$

$$\overset{D.L.H}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - T_2'(x)}{2(x-x_0)} \quad f.i. \ \frac{0}{0}$$

$$\overset{D.L.H}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x) - T_2''(x)}{2} = \frac{1}{2}\left(f''(x_0) - T_2''(x_0)\right) = 0$$

OSS 3

T_2 è l'unico polinomio di grado ≤ 2 che ha la proprietà dell'osservazione 2.

Idea: Se p è un polinomio di grado ≤ 2 allora $p(t) = at^2 + bt + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Consideriamo $p(x-x_0) = a(x-x_0)^2 + b(x-x_0) + c$

Se vogliamo che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - p(x-x_0)}{(x-x_0)^2} = 0$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - a(x-x_0)^2 - b(x-x_0) - c}{(x-x_0)^2} \qquad \frac{f(x_0)-c}{0^+}$$

se il limite è zero, c deve essere $f(x_0)$.

Allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - a(x-x_0)^2 - b(x-x_0) - f(x_0)}{(x-x_0)^2} \qquad \frac{0}{0}$$

$$\overset{D.L.H}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - 2a(x-x_0) - b}{2(x-x_0)} \qquad \frac{f'(x_0)-b}{0}$$

Se il limite viene zero, $b = f'(x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - 2a(x - x_0) - f'(x_0)}{2(x - x_0)}$$

$$\overset{D.L.H}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - 2a}{2} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{2} f''(x) - a$$

Se il limite è 0 allora $a = \frac{1}{2} f''(x_0)$,

Quindi: $p(x - x_0) = T_2(x)$.

Vedremo che fra tutti i polinomi di grado $\leq n$, quello che approssima meglio f in un intorno di x_0 è

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0)(x - x_0)^3$$

$$+ \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

dove $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.