TEOREMA (CRITERIO DI MONOTONIA)

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile in I. Allora valgono le seguenti affermazioni:

1) f è monotona crescente in I $\Longleftrightarrow$ $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$
2) f è monotona decrescente in I $\Longleftrightarrow$ $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$.
3) Se $f'(x) > 0$ in I, allora f è strett. monotona crescente in I
4) Se $f'(x) < 0$ in I, allora f è strett. monotona decrescente in I.

CONSEGUENZA

1) Il segno di f' permette di determinare gli intervalli in cui f è crescente e quelli in cui f è decrescente.
2) Il segno di f' ci permette di individuare i punti di max/min locale per f.

Derivate seconde e derivate di ordine superiore

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in I. Allora $f': \begin{matrix} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f'(x) \end{matrix}$ è una funzione. Se f' è derivabile in un punto x_0, la derivata di f' in x_0 si dice **DERIVATA SECONDA** di f in x_0. La derivata seconda di f in x_0 si indica con $f''(x_0)$ oppure con: $(f(x))''\big|_{x=x_0}$, $\frac{d^2}{dx^2}f(x)\big|_{x=x_0}$, $f^{(2)}(x_0)$, $\ddot{f}(x_0)$.

Se indichiamo con x il punto in cui calcoliamo la derivata seconda, possiamo usare i simboli:
$f''(x)$, $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$, $f^{(2)}(x)$, $\ddot{f}(x)$

Def: Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$. Siano $x_0 \in I$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Se f è $n-1$ volte derivabile in un intorno di

x_0 e la derivata $n-1$-esima di f è derivabile in x_0, si dice che f è **DERIVABILE N-VOLTE** in x_0 e la derivata di $f^{(n-1)}$ si dice **DERIVATA N-ESIMA** di f in x_0 e si indica con $f^{(n)}(x_0)$.

ESEMPIO

$$f(x) = x^7 + x^3 - 2x$$

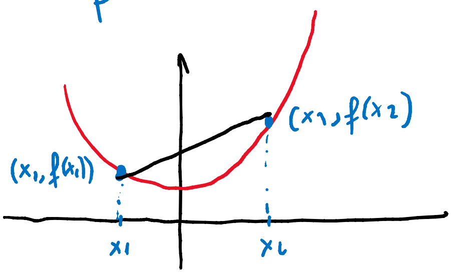
$$f'(x) = 7x^6 + 3x^2 - 2 = f^{(1)}(x)$$

$$f''(x) = 42x^5 + 6x = f^{(2)}(x)$$

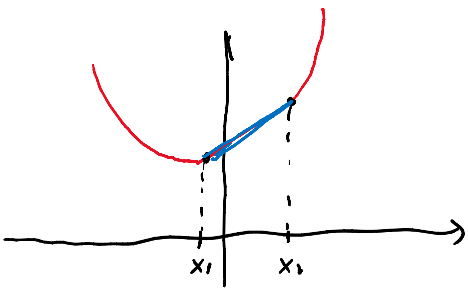
$$f'''(x) = 210x^4 + 6 = f^{(3)}(x).$$

A cosa serve la derivata seconda?

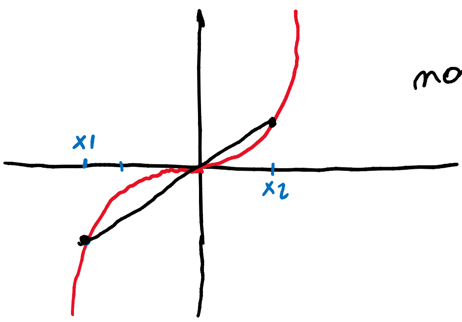
Def: Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \to \mathbb{R}$. Si dice che f è **CONVESSA** in I se $\forall x_1, x_2 \in I$ il segmento nel piano di estremi $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ non contiene punti al di sotto del grafico di f.



convessa

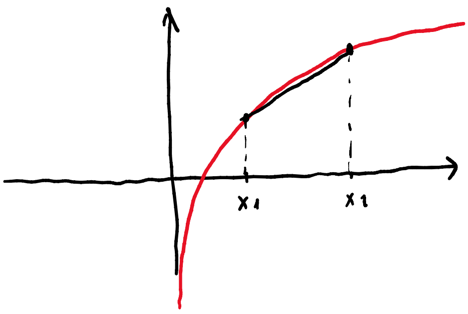


convessa



non è convessa

Def: Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione. Si dice che f è **CONCAVA** in I se $\forall x_1, x_2 \in I$ il segmento nel piano di estremi $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ non contiene punti al di sopra del grafico di f.

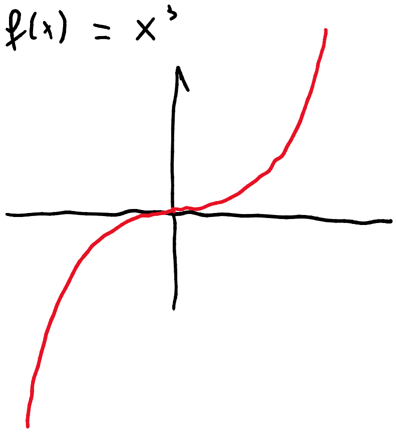


funzione concava.

OSS Ci sono funzioni che non sono né concave né convesse.

ESEMPIO

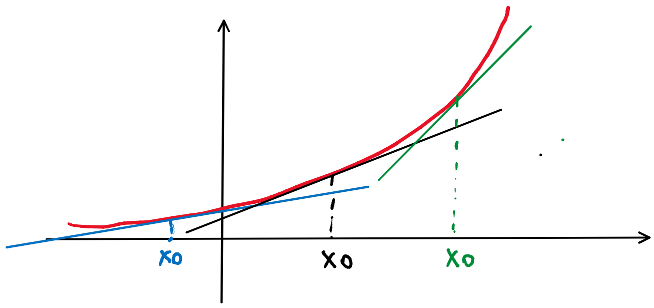
$f(x) = x^3$



Non è né convessa né concava in $\mathbb{R}$.

Ma:

- è convessa in $[0, +\infty)$.
- è concava in $(-\infty, 0]$.



La pendenza della retta tangente al grafico di una funzione convessa aumenta all'aumentare di x_0. Inoltre il grafico si trova sempre sopra la retta tangente

TEOREMA (CARATTERIZZAZIONE DELLA CONVESSITÀ)

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in I. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni

1) f è convessa in I (risp. concava)
2) f' è monotona crescente in I (risp. decrescente)
3) $\forall\, x, y \in I$: $f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x)$. (risp. $\leq$)

Se inoltre f è due volte derivabile in I, allora le affermazioni precedenti sono equivalenti a:

4) $f''(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in I$. (risp. $\leq$)

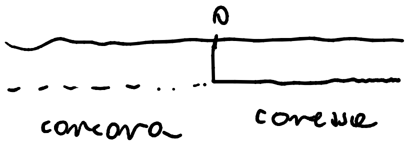
ESEMPI

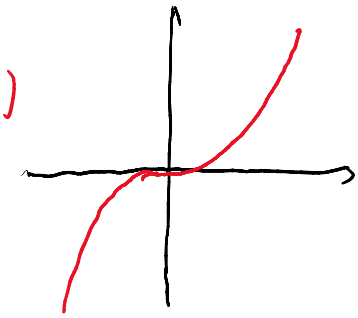
1) $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$ $\quad (f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ è monotona crescente$)$

$f''(x) = 6x$

Segno di f'' :





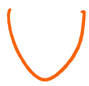
Def: Sia $f: I \to \mathbb{R}$, con I intervallo una funzione derivabile in I. Sia $x_0 \in I$ un punto interno ad I. Si dice che x_0 è un PUNTO DI FLESSO per f in I se f è concava in un intorno sinistro di x_0 e convessa in un intorno destro di x_0 o viceversa.

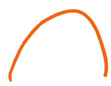
2) $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

$f''(x) = 2a$

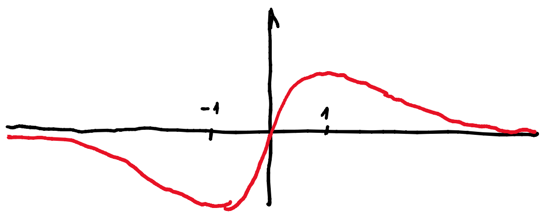
$a > 0$ convessa $\qquad\qquad a < 0$ concava





3) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

$f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$



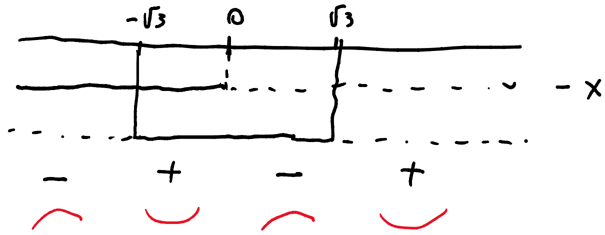
$$f''(x) = \frac{-2x\,(1+x^2)^2 - (1-x^2)\cdot 2\,(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}$$

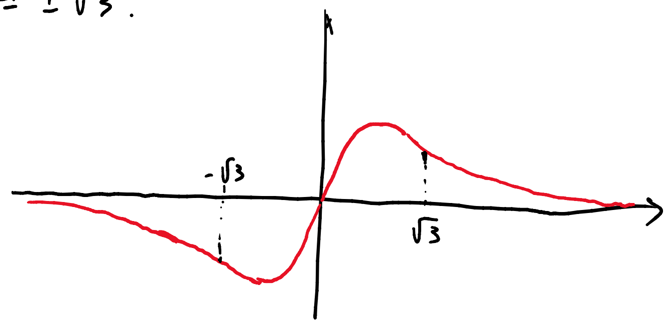
$$= \frac{-\cancel{(1+x^2)}\cdot 2x\,\left(1+x^2 + (1-x^2)\cdot 2\right)}{(1+x^2)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= -\frac{2x\,(1+x^2+2-2x^2)}{(1+x^2)^3}$$

$$= -\frac{2x\,(3-x^2)}{(1+x^2)^3}$$

$f''(x) = 0 \iff x = 0 \ \vee \ x = \pm\sqrt{3}$.





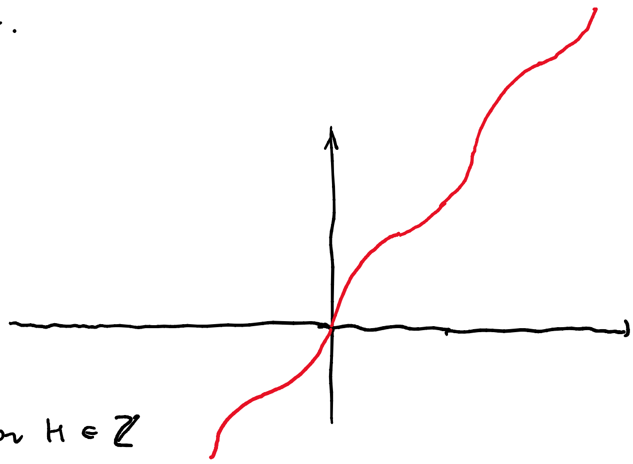
0, $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$ sono punti di flesso.

ESEMPIO 4

$f(x) = x + \frac{1}{2}\sin x$

$f'(x) = 1 + \frac{1}{2}\cos x > 0$

$f''(x) = -\frac{1}{2}\sin x$



$f''(x) > 0$ se $\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

$f''(x) <$ se $0 + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

Riepilogo sullo studio di funzioni

Cosa fare per studiare il grafico di una funzione?

1) Dominio
2) Ricerca di simmetrie / periodicità
   (stabilire se f è pari / dispari / periodica)
3) Segno e zeri della funzione. (SE POSSIBILE)
4) Limiti significativi e asintoti.
   ($\lim_{x \to x_0} f(x)$ dove x_0 è un punto estremo del dominio).
5) Studio della derivabilità e calcolo della derivata.
6) Segno e zeri della derivata: monotonia e punti di max / min.
7) Derivata seconda: convessità / concavità (SOLO SE RICHIESTO)
8) Grafico.

ESERCIZIO

Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$

1) Dominio $\quad 1-x \neq 0 \iff x \neq 1$

quindi $\quad Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

2) Simmetrie:

$f(-x) = \dfrac{e^{-x}}{1+x} \neq f(x) \quad e \quad f(-x) \neq -f(x)$

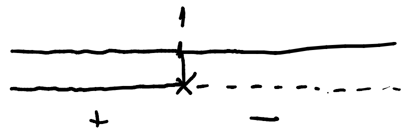
f non è pari né dispari.

3) Segno e zeri

$f(x) = \dfrac{e^x}{1-x} \qquad f(x) = 0 \iff e^x = 0$ (impossibile).

Non ci sono zeri della funzione cioè non ci sono intersezioni del grafico con l'asse x.

$f(x) > 0 \iff \dfrac{\overset{>0}{e^x}}{1-x} > 0 \iff \dfrac{1}{1-x} > 0$

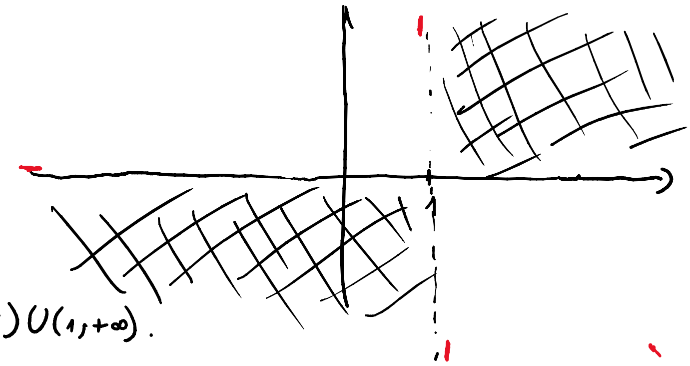


Riassumendo:

$f > 0$ in $(-\infty, 1)$

$f < 0$ in $(1, +\infty)$

$f \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.



4) Limiti

$f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$, $Dom(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{1-x} = \dfrac{0}{+\infty} = 0$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{e^x}{1-x} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{+\infty}{-\infty}$ f.i.

per la gerarchia degli infiniti: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{1-x} = \lim\limits_{x \to} \underbrace{\dfrac{e^x}{x}}_{\to +\infty} \underbrace{\dfrac{1}{\left(\frac{1}{x} - 1\right)}}_{\to -1} = -\infty$

Asintoti:

- $y = 0$ è asint. orizzontale per $x \to -\infty$
- $x = 1$ è un asint. verticale.

5) Derivata:

f è derivabile nel suo dominio perché rapporto di funzioni derivabili

$$f(x) = \frac{e^x}{1-x}$$

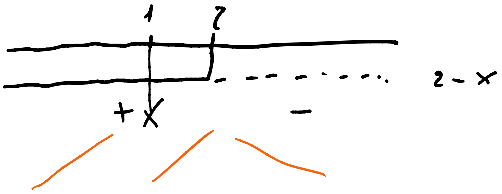
$$f'(x) = \frac{e^x(1-x) - e^x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{e^x(1-x) + e^x}{(1-x)^2} = \frac{e^x(2-x)}{(1-x)^2}$$

6) <u>Segno e zeri di f'</u>

$$f'(x) = 0 \iff e^x(2-x) = 0 \iff 2 - x = 0 \iff x = 2.$$

Inoltre

$$f(x) \geq 0 \iff \frac{\overset{>0}{e^x}(2-x)}{\underbrace{(1-x)^2}_{>0 \text{ in } \mathbb{R}\setminus\{1\}}} \geq 0$$



In $x=2$ c'è un punto di massimo locale

$$f(2) = \frac{e^2}{1-2} = -e^2$$

7) <u>Derivata seconda</u>:

$$f'(x) = \frac{e^x(2-x)}{(1-x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(e^x(2-x))'(1-x)^2 - e^x(2-x)\,2(1-x)(-1)}{(1-x)^4}$$

$$= \frac{\left(e^x(2-x) + e^x(-1)\right)(1-x)^2 + 2e^x(2-x)(1-x)}{(1-x)^4}$$

$$= \frac{e^x \cancel{(1-x)}\left[(2-x-1)(1-x) + 2(2-x)\right]}{(1-x)^{\cancel{4}\,3}}$$

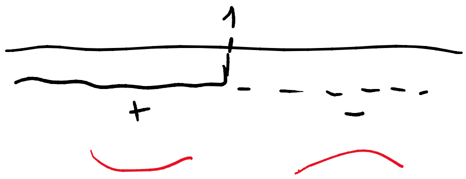
$$= \frac{e^x\left[(1-x)^2 + 4 - 2x\right]}{(1-x)^3}$$

$$\Delta = 16 - 20 < 0$$

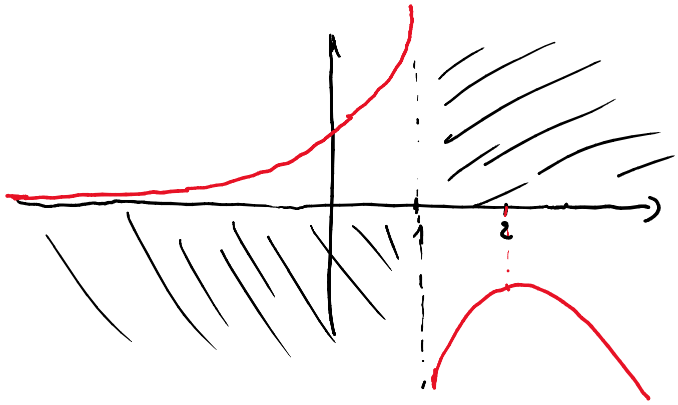
$$= \frac{e^x(1 - 2x + x^2 + 4 - 2x)}{(1-x)^3} = \frac{e^x(x^2 - 4x + 5)}{(1-x)^3}$$

$$f'' > 0 \iff x < 1$$

$$f'' < 0 \iff x > 1$$



8) <u>Grafico</u>



ESERCIZIO

$$f(x) = \frac{\log^2|x|}{x} = \frac{(\log|x|)^2}{x}$$

1) Dom(f):

$$\begin{cases} |x| > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \iff x \neq 0.$$

2) Simmetrie:

$$f(-x) = \frac{\log^2|-x|}{-x} = -\frac{\log^2|x|}{x} = -f(x)$$

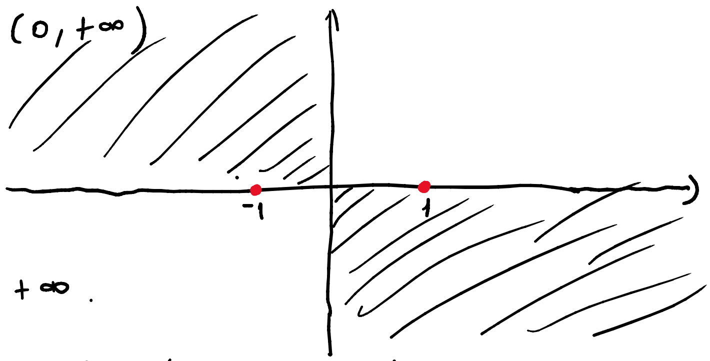
f è dispari

Possiamo studiare la funzione per $x > 0$.

3) Segno e zeri (con $x > 0$, $f(x) = \frac{\log^2 x}{x}$).

$f(x) = 0 \iff \log^2 x = 0 \iff \log x = 0 \iff x = 1$

Segno $\frac{\log^2 x}{x} \geq 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$



4) Limiti $(x > 0)$

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{\log^2 x}{x} = \frac{(-\infty)^2}{0^+} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty.$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log^2 x}{x} = 0$ per la gerarchia degli infiniti.

Poiché f è dispari:

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

5) Derivata in $(0, +\infty)$

In $(0, +\infty)$ si ha $f(x) = \frac{\log^2 x}{x}$.

f è derivabile in $(0,+\infty)$ e

$$f'(x) = \frac{\left(2\log x \cdot \frac{1}{x}\right)\cdot x - \log^2 x \cdot 1}{x^2} = \frac{2\log x - \log^2 x}{x^2}$$

6) Segno e zeri di f':

$$f'(x)=0 \iff 2\log x - \log^2 x = 0$$

Se $t = \log x$

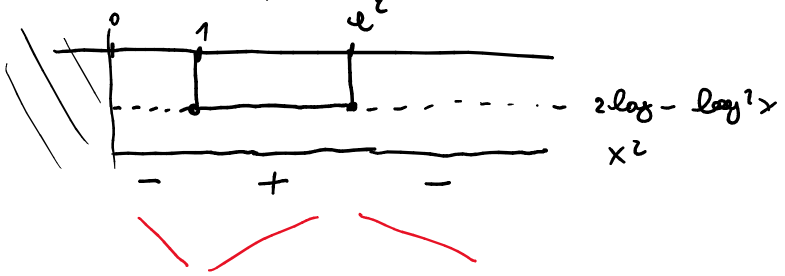
$$2t - t^2 = 0$$

$$t(2-t) = 0 \iff t=0 \lor t=2 \iff \log x = 0 \lor \log x = 2 \iff x = 1 \lor x = e^2$$

In modo simile:

$$2\log x - \log^2 x \geq 0 \iff 2t - t^2 \geq 0 \iff 0 \leq t \leq 2 \iff 0 \leq \log x \leq 2 \iff 1 \leq x \leq e^2$$

Segno di f'



$x=1$ è punto di min locale $\qquad f(1) = 0$

$x=e^2$ è punto di max locale $\qquad f(e^2) = \frac{(2)^2}{e^2} = \frac{4}{e^2}$

Grafico