Numeri reali

$$\mathbb{R} = \{ n, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots \dots \mid n \in \mathbb{Z}, a_1, a_2, a_3 \dots \in \{0,1,2,\dots,9\} \}$$

In $\mathbb{R}$ sono definite le seguenti operazioni:

Addizione, sottrazione, prodotto (o moltiplicazione), divisione

Operazioni principali

PROPRIETÀ DELL'ADDIZIONE

1) $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $a + b = b + a$ (PROP. COMMUTATIVA)
2) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: $a + (b+c) = (a+b) + c$ (PROP. ASSOCIATIVA)
   $a + b + c$
3) $\forall a \in \mathbb{R}$; $a + 0 = a$
4) $\forall a \in \mathbb{R}$: $-a$ è l'unico numero reale tale che $a + (-a) = 0$.

Conseguenze

- LEGGE DI CANCELLAZIONE :

  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: $a + c = b + c \iff a = b$

  $(a + \cancel{c} = b + \cancel{c} \iff a = b)$

- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: $a + c = b \iff a = b - c$

Sottrazione: $a - b = a + (-b)$ quindi le proprietà della sottrazione si ricavano da quelle dell'addizione. Attenzione però, le proprietà sono diverse.

- La sottrazione non è commutativa:

  $a - b = -(b - a)$

  Infatti: $a - b + (b - a) = a + (-b) + b + (-a) = 0$

  quindi $a - b = -(b - a)$.

- La sottrazione non è associativa:

$$a-(b-c) = a-b+c = a+(-b)+c$$

$$(a-b)-c = a-b-c = a+(-b)+(-c)$$

PROPRIETÀ DELLA MOLTIPLICAZIONE (Indichiamo il prodotto con $a \cdot b$ o ab)

1) $\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad a \cdot b = b \cdot a$ (PROP. COMMUTATIVA DELLA MOLTIPLICAZIONE)

2) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$
(PROP. ASSOCIATIVA DELLA MOLTIPLICAZIONE)

3) $\forall a \in \mathbb{R}: \quad a \cdot 1 = a.$

4) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: \quad \frac{1}{a}$ è l'unico numero reale tale che
$$a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

5) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \quad a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$
(PROP. DISTRIBUTIVA).

ESEMPI

- $2(3x-7) = 6x-14$
- $-(x+2) = -x-2$
- $x^2+x = x(x+1)$

Conseguenze:

- $\forall a \in \mathbb{R}: \quad a \cdot 0 = 0$
- Legge di annullamento del prodotto
$\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad a \cdot b = 0 \iff a = 0 \vee b = 0$
- Legge di cancellazione per la moltiplicazione:
$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, c \neq 0: \quad ac = bc \iff a = b$
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ con $c \neq 0: \quad ac = b \iff a = \frac{b}{c}$

Attenzione alle leggi di cancellazione

- $X + \cancel{3} = 5 + \cancel{3} \iff x = 5$
- $x + \cancel{3} = \cancel{3} \iff x = 0$
- $\cancel{2}X = \cancel{2} \iff x = 1$

Nota: Dato che $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ le proprietà della divisione si ricavano da quelle della moltiplicazione

---

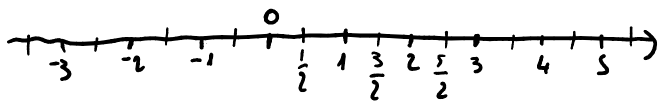
Le regole che abbiamo visto si usano per risolvere equazioni oppure per semplificare espressioni.

$$\frac{(3-x)(3x+3)}{x^2-3x} = \frac{(3-x)(3x+3)}{x(x-3)} = -\frac{\cancel{(x-3)}(3x+3)}{x\cancel{(x-3)}}$$

$$= -\frac{3x+3}{x} = -\left(3+\frac{3}{x}\right) = -3-\frac{3}{x}$$

Ordinamento dei numeri reali

I numeri reali si possono rappresentare su una retta



MAGGIORE MAGGIORE O UGUALE

MINORE MINORE O UGUALE

Relazioni di ordinamento ($>$, $<$, $\geq$, $\leq$):

$a > b$ significa che a sta alla destra di b sulla retta

$a \geq b$ significa: $a > b \vee a = b$

$a < b$ significa a è alla sinistra di b

$a \leq b$ significa $a < b \vee a = b$

OSS

1) $a > b \iff b < a$
2) $a \geq b \iff b \leq a$.

3) $\neg (a > b) \iff a \leq b$

4) $\neg (a \geq b) \iff a < b$

- Proprietà della relazione di ordinamento $\leq$:

1) $\forall a \in \mathbb{R}$: $a \leq a$

2) $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $a \leq b \ \wedge \ b \leq a \iff a = b$

3) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: $a \leq b \ \wedge \ b \leq c \Rightarrow a \leq c$
(PROP. TRANSITIVA)

4) (PROP. TOTALE) $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $a \leq b \ \vee \ b \leq a$.

5) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: $a \leq b \iff a + c \leq b + c$
Equivalentemente : $a + c \leq b \iff a \leq b - c$

6) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $\boxed{c > 0}$: $a \leq b \iff ac \leq bc$
Equivalentemente : $ac \leq b \iff a \leq \frac{b}{c}$

7) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ con $c < 0$: $a \leq b \iff ac \geq bc$
$ac \leq b \iff a \geq \frac{b}{c}$

ESEMPI

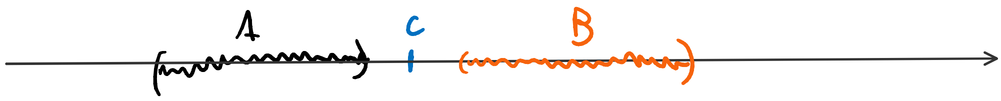
- $-2x \geq 1 \iff x \leq \frac{1}{-2}$
- $1 - 5x < 0 \iff -5x < -1 \iff x > \frac{-1}{-5}$
$\iff x > \frac{1}{5}$

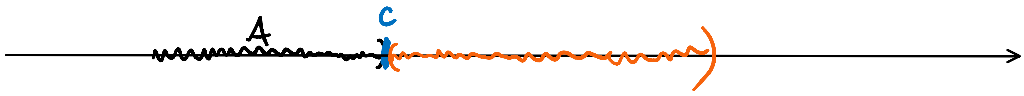
Oppure :

$1 - 5x < 0 \iff 1 < 5x \iff 5x > 1 \iff x > \frac{1}{5}$

Proprietà di CONTINUITÀ di $\mathbb{R}$ (o P. DI DEDEKIND)
Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tali che :
1) $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$
2) $\forall a \in A, b \in B$: $a \leq b$.

Allora $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tale che $\forall a \in A,\ b \in B:\ a \le c \le b$.





Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ $\exists\, q \in \mathbb{Q}$ tale che $a < q < b$.

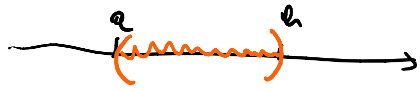
Intervalli:

Dati $a, b \in \mathbb{R}$, chiamiamo INTERVALLI i seguenti insiemi:

1) $[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} : a \le x \le b \}$

INTERVALLO CHIUSO DI ESTREMI a e b

2) $(a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$



INTERVALLO APERTO DI ESTREMI a e b

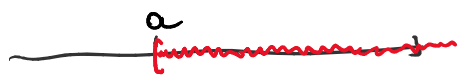
3) $[a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b \}$

INTERVALLO SEMIAPERTO A DESTRA DI ESTREMI a e b

4) $(a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b \}$

INTERVALLO SEMIAPERTO A SINISTRA DI ESTREMI a e b

5) $[a, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \ge a \}$



SEMIRETTA CHIUSA DI ESTREMO SINISTRO a

6) $(a, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > a \}$

SEMIRETTA APERTA DI ESTREMO SINISTRO a

7) $(-\infty, a] = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \le a \}$

SEMIRETTA CHIUSA DI ESTREMO DESTRO a

8) $(-\infty, a) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < a \}$

SEMIRETTA APERTA DI ESTREMO DESTRO a

9) $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ (RETTA REALE)

Attenzione: $[a, b] = \emptyset$ se $a > b$

Notazione:

Su alcuni libri:
(a, b) si indica con $]a, b[$.
$(a, b]$ si indica con $]a, b]$
$[a, b)$ si indica con $[a, b[$
$(a, +\infty)$ si indica con $]a, +\infty[$
$(-\infty, a)$ si indica con $]-\infty, a[$

Estremo superiore e inferiore

Così come gli intervalli, tutti gli insiemi (non vuoti) possiedono due estremi.

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Si definisce MASSIMO di A il più grande degli elementi di A (si indica con $\max A$)

Si definisce MINIMO di A il più piccolo degli elementi di A (si indica con $\min A$)

oss Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme e sia $x \in \mathbb{R}$. Allora:

1) $x = \min A \iff x \in A \wedge x \geq a \quad \forall a \in A$.
2) $x = \min A \iff x \in A \wedge x \leq a \quad \forall a \in A$.

ESEMPI

- $A = \{-1, 7, 12\}$

  $\max A = 12$

  $\min A = -1$

- $A = \{11, -13, 0, -4\}$

  $\max A = 11$

  $\min A = -13$

- $A = [0, 7]$

  $\max A = 7$

  $\min A = 0$

- $A = [0, 7)$ 

  $\min A = 0$ ma $\nexists \max A$.

Il problema della definizione di massimo (o minimo) di un insieme è che non sempre il massimo (o il minimo) esiste.

Diamo allora un'altra definizione:

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Si dice che A è SUPERIORMENTE LIMITATO se $\exists\, x \in \mathbb{R}$ tale che $x \geq a \quad \forall\, a \in A$.
Un numero reale x con questa proprietà si dice un MAGGIORANTE per A. L'insieme di tutti i maggioranti per A si indica con $\mathcal{M}(A)$.

ESEMPI

1) $A = \{-1, 7, 12\}$

L'insieme A è superiormente.

Ad esempio 100 è un maggiorante

27 è un maggiorante

12 è un maggiorante.

Si noti che 12 è il più piccolo tra i maggioranti.

Infatti $\mathcal{M}(A) = [12, +\infty)$

2) $A = [0, 7)$

10 è un maggiorante.

4 NON è un maggiorante

7 è un maggiorante

$\mathcal{M}(A) = [7, +\infty)$

TEOREMA (TEOREMA DI ESISTENZA DELL'ESTREMO SUPERIORE)

Sia $A \neq \emptyset$ tale che $\mathcal{M}(A) \neq \emptyset$ (cioè A è superiormente limitato). Allora $\exists \min \mathcal{M}(A)$.

DIM

Sia $B = \mathcal{M}(A)$. Allora:

1) Per ipotesi: $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$

2) $\forall a \in A$, $b \in B = \mathcal{M}(A)$: $a \leq b$.

Per la proprietà di continuità di $\mathbb{R}$ $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che:

$\forall a \in A$, $\forall b \in B$: $a \leq c \leq b$.

Allora:

$\forall a \in A$: $a \leq c \Rightarrow c \in \mathcal{M}(A)$.

$\forall b \in \mathcal{M}(A)$: $c \leq b \Rightarrow c = \min \mathcal{M}(A)$.

Def: Sia $A \neq \emptyset$. Se A è superiormente limitato, si definisce ESTREMO SUPERIORE di A il minimo di $\mathcal{M}(A)$ (e si indica con $\sup A$)

Se invece A non è superiormente limitato, diremo che $\sup A = +\infty$

Def: Sia $A \neq \emptyset$. Si dice che A è INFERIORMENTE LIMITATO se $\exists x \in \mathbb{R}$ t.c. $x \leq a$ $\forall a \in A$. Un numero x che soddisfa tale proprietà si dice un MINORANTE per A. L'insieme dei minoranti per A si indica con $m(A)$.

Def: Sia $A \neq \emptyset$. Se A è inferiormente limitato definiamo ESTREMO INFERIORE di A il più grande tra i minoranti di A cioè il massimo di $m(A)$. (L'estremo inferiore si indica con $\inf A$). Se A non è inferiormente limitato diremo che $\inf A = -\infty$).

ESEMPI

1) $A = (2, 3)$

$\sup A = 3$ e $\inf A = 2$

Infatti $\mathcal{M}(A) = [3, +\infty)$ e $m(A) = (-\infty, 2]$

2) $A = \mathbb{N}$

$\sup \mathbb{N} = +\infty$ (e $\nexists \max \mathbb{N}$)

$\inf \mathbb{N} = 0 = \min \mathbb{N}$.

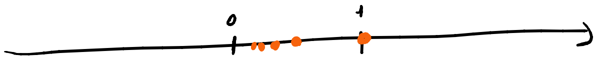
$\mathcal{M}(\mathbb{N}) = \emptyset$

$m(\mathbb{N}) = (-\infty, 0]$

3) $A = \mathbb{Z}$

$\sup \mathbb{Z} = +\infty$ e $\inf \mathbb{Z} = -\infty$.

4) $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$



$= \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots \right\}$

$\sup A = 1 = \max A$. $\qquad \mathcal{M}(A) = [1, +\infty)$

$\inf A = 0 \qquad m(A) = (-\infty, 0]$

OSS

1) Se $\exists \max A$, allora $\sup A = \max A$.

2) Se $\exists \min A$, allora $\inf A = \min A$.

3) Se $\sup A \in A$, allora $\exists \max A$ e $\max A = \sup A$.

4) Se $\inf A \in A$, allora $\exists \min A$ e $\min A = \inf A$.

Radici

Le definizioni di sup e inf ci permettono di definire le radici quadrate dei numeri reali non negativi.

Ad esempio:

$$\sqrt{2} := \sup \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \ \wedge \ x^2 \leq 2 \}$$

Si dimostra che $(\sqrt{2})^2 = 2$.

Anche $(-\sqrt{2})^2 = 2$.

OSS $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ sono gli unici numeri il cui quadrato è 2.

DIM Sia $x \in \mathbb{R}$:

$$x^2 = 2 \iff x^2 - 2 = 0 \iff x^2 - (\sqrt{2})^2 = 0$$
$$\iff (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) = 0$$
$$\iff x + \sqrt{2} = 0 \ \vee \ x - \sqrt{2} = 0$$
$$\iff x = -\sqrt{2} \ \vee \ x = \sqrt{2}.$$

Si può quindi dire che $\sqrt{2}$ è l'unico numero positivo il cui quadrato è 2.

Def: Sia $y \in \mathbb{R}$, $\boxed{y \geq 0}$. Si definisce $\sqrt{y}$ (RADICE QUADRATA DI y) l'unico numero reale non negativo x tale che $x^2 = y$.

Ricordare

- $\sqrt{y}$ è definita solamente se $y \geq 0$.
- $\sqrt{y} = 0 \iff y = 0$.
- $\sqrt{y} \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}, y \geq 0$.

Def Sia $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$. Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, n pari. Si definisce RADICE n-ESIMA di y ($\sqrt[n]{y}$) l'unico numero reale non negativo x tale che $x^n = y$.

Def Sia $y \in \mathbb{R}$. Sia $n \in \mathbb{N}$, n dispari. Si definisce RADICE n-ESIMA di y ($\sqrt[n]{y}$) l'unico numero reale x tale che $x^n = y$.

Ricordare:

- n pari: $\sqrt[n]{y}$ è definita solo se $y \geq 0$

  $\sqrt[n]{y} = 0 \iff y = 0$

  $\sqrt[n]{y} \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R},\ y \geq 0.$

- n dispari: $\sqrt[n]{y}$ è definita $\forall y \in \mathbb{R}$.

  $\sqrt[n]{y} = 0 \iff y = 0$

  $\sqrt[n]{y}$ ha lo stesso segno di y.