

RADICI m-ESIME COMPLESSE dei numeri complessi

Definizione Sia $z \in \mathbb{C}$ e $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, si dicono RADICI m-ESIME COMPLESSE di z tutti i numeri complessi $w \in \mathbb{C}$ tali che $w^m = z$

Osservazione Se $z=0$ l'unico numero complesso $w \in \mathbb{C}$ tale che $w^m = 0$ è $w=0$ (poiché in $\mathbb{C}$ vale la legge di annullamento del prodotto), se invece $z \neq 0$ dimostriamo adesso che z ammette esattamente m radici m-esime a due a due distinte.

Proposizione Sia $z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$.

Allora z ammette m radici m-esime complesse $w_0, w_1, \dots, w_{m-1}$ e

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, m-1\} \quad w_k = \sqrt[m]{|z|} \left(\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{m} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{m} \right) \right)$$

Note Nell'enunciato precedente $\sqrt[m]{|z|}$ denota la radice m-esima reale del numero reale non negativo $|z|$.

dimostrazione: Sia $w = |w| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ e supponiamo che w sia una radice m-esima complessa di z , cioè $w^m = z$

Dalle formule di De Moivre abbiamo che

$$w^m = |w|^m (\cos(m\varphi) + i \sin(m\varphi)) = z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |w|^m = |z| \\ \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } m\varphi = \theta + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |w| = \sqrt[m]{|z|} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{m} \end{cases}$$

$$w = \sqrt[m]{|z|} \left(\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{m} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{m} \right) \right) = w_k \quad \text{per qualche } k \in \mathbb{Z}$$

Si dimostra che $\{w_k : k \in \mathbb{Z}\}$ è in realtà un insieme

$$\text{finito} \quad \{w_k : k \in \mathbb{Z}\} = \{w_0, w_1, \dots, w_{m-1}\}$$

Esempio Sia $z = 1 - \sqrt{3}i$ calcoliamo le radici quadrate complesse di z

Cominciamo scrivendo z in forma trigonometrica

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

per determinare un argomento θ di z , risolviamo

$$\begin{cases} \cos \theta = \operatorname{Re}(z)/|z| \\ \sin \theta = \operatorname{Im}(z)/|z| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}$$

$$\arg(z) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\operatorname{Arg}(z) = \frac{5}{3}\pi$$

$$z = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)$$

le radici quadrate complesse di z sono

$$\begin{aligned} w_k &= \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{2} \right) \right) & k=0,1 \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} + k\pi \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} + k\pi \right) \right) \end{aligned}$$

scriviamo w_0, w_1 in forma algebrica

$$w_0 = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}$$

$$w_1 = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} + \pi \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} + \pi \right) \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}$$

Simulazione queste d'esame

Q1 Si consideri il numero complesso $w = \frac{1+9i}{4-5i}$

a) Determinare la forma algebrica di w

b) Determinare la forma trigonometrica e la forma esponenziale di w

c) Calcolare w^3, w^4, w^5

d) Calcolare le radici cubiche, seste e decime complesse di w

Svolgimento : a) $W = \frac{1+9i}{4-5i} \cdot \frac{4+5i}{4+5i} = \frac{4+5i+36i-45}{4^2+5^2} = \frac{-41+41i}{41}$
 $= -1+i$ forma algebrica

b) $|W| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$ modulo di w

determiniamo un argomento φ di w

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{\operatorname{Re}(w)}{|w|} \\ \sin \varphi = \frac{\operatorname{Im}(w)}{|w|} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{3}{4}\pi$$

$w = \sqrt{2} (\cos(\frac{3}{4}\pi) + i \sin(\frac{3}{4}\pi))$ forma trigonometrica

$w = \sqrt{2} e^{i\frac{3}{4}\pi}$ forma esponenziale

c) Applichiamo la formula di De Moivre

$$\begin{aligned} w^3 &= (\sqrt{2})^3 (\cos(3 \cdot \frac{3}{4}\pi) + i \sin(3 \cdot \frac{3}{4}\pi)) \\ &= 2\sqrt{2} (\cos(\frac{9}{4}\pi) + i \sin(\frac{9}{4}\pi)) = 2\sqrt{2} (\cos(\frac{\pi}{4} + 2\pi) + i \sin(\frac{\pi}{4} + 2\pi)) \\ &= 2\sqrt{2} (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2} (\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}) = 2 + i2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w^4 &= (\sqrt{2})^4 (\cos(4 \cdot \frac{3}{4}\pi) + i \sin(4 \cdot \frac{3}{4}\pi)) \\ &= 4 (\cos(3\pi) + i \sin(3\pi)) = 4 (\cos(\pi + 2\pi) + i \sin(\pi + 2\pi)) \\ &= 4 (\cos \pi + i \sin \pi) = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w^5 &= (\sqrt{2})^5 (\cos(\frac{15}{4}\pi) + i \sin(\frac{15}{4}\pi)) \\ &= 4\sqrt{2} (\cos(\frac{7}{4}\pi + 2\pi) + i \sin(\frac{7}{4}\pi + 2\pi)) \\ &= 4\sqrt{2} (\cos(\frac{7}{4}\pi) + i \sin(\frac{7}{4}\pi)) = 4\sqrt{2} (\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}) \\ &= 4(1-i) \end{aligned}$$

d) Denotiamo con z_0, z_1, z_2 le radici cubiche complesse di w

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[3]{\sqrt{2}} (\cos(\frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{3}) + i \sin(\frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{3})) \\ &= \sqrt[6]{2} (\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}k\pi) + i \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}k\pi)) \quad k=0,1,2 \end{aligned}$$

Denotiamo con $z'_0, z'_1, z'_2, \dots, z'_5$ le radici seste complesse di w

$$\begin{aligned} z'_k &= \sqrt[12]{2} (\cos(\frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{6}) + i \sin(\frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{6})) \\ &= \sqrt[12]{2} (\cos(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{3})) \quad k=0,1,2,3,4,5 \end{aligned}$$

Denotiamo con $z''_0, z''_1, \dots, z''_9$ le radici decime complesse di w

$$z''_k = \sqrt[20]{2} (\cos(\frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{10}) + i \sin(\frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{10})) \quad k=0,1,\dots,9$$

Osservazione Come si calcola i^k per $k \in \mathbb{Z}$?

Se $k \geq 0$ abbiamo $i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i,$
 $i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1, i^7 = -i$

facciamo la divisione di k per 4, cioè determiniamo un quoziente q e un resto $r \in \{0,1,2,3\}$

$$k = 4q + r, \text{ concludiamo } i^k = i^{4q+r} = (i^4)^q \cdot i^r = i^r$$

$$\text{ovvero } i^k = \begin{cases} 1 & \text{se } r=0 \\ i & \text{se } r=1 \\ -1 & \text{se } r=2 \\ -i & \text{se } r=3 \end{cases}$$

$$\text{Se invece } k < 0 \text{ allora } i^k = (i^{-1})^{-k} = (-i)^{-k} = (-1)^{-k} i^{-k}$$

$$\hookrightarrow i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-i}{1} = -i$$

Esempi Calcoliamo i^{1003} , i^{-596}

$$1003 = \underbrace{250 \cdot 4 + 3}_{\text{quoziente}} \quad \text{resto della divisione } 1003 \div 4$$

$$i^{1003} = i^3 = -i$$

$$i^{-596} = (i^{-1})^{596} = (-i)^{596} = (-1)^{596} i^{596} = i^{596} = i^0 = 1$$

$$596 = 149 \cdot 4 + 0$$

Q2 Si consideri il numero complesso $z = \frac{-27 - 9i}{2i^8 + i^3 + 2i^5 + i^{-4}}$

a) Determinare la forma algebrica di z

b) Determinare la forma trigonometrica e la forma esponenziale di z

c) Calcolare le radici quadrate, cubiche e quarte complesse di z , scrivendole esplicitamente in forma algebrica

$$\text{Svolgimento: a) } z = \frac{-27 - 9i}{2i^8 + i^3 + 2i^5 + i^{-4}} = \frac{-27 - 9i}{2 - i + 2i + 1} = \frac{-27 - 9i}{3 + i}$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ &\begin{aligned} i^8 &= 1 \\ i^3 &= -i \\ i^5 &= i \\ i^{-4} &= 1 \end{aligned} \end{aligned}$$

$$= \frac{-9(3+i)}{3+i} = -9 \quad \text{forma algebrica di } z$$

b) $|z| = 9$

$$z = 9(\cos \pi + i \sin \pi) \quad \text{forma trigonometrica}$$

$$z = 9e^{i\pi} \quad \text{forma esponenziale}$$

c) Dimostriamo con w_0, w_1 le radici quadrate complesse di z

$$\begin{aligned} w_k &= \sqrt[2]{9} \left(\cos \left(\frac{\pi + 2k\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi + 2k\pi}{2} \right) \right) \\ &= 3 \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) \right) \quad k=0,1 \end{aligned}$$

$$w_0 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 3(0 + i \cdot 1) = 3i$$

$$w_1 = 3 \left(\cos \left(\frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} \right) \right) = 3 \cdot (0 + i(-1)) = -3i$$

Dimostriamo con w'_0, w'_1, w'_2 le radici cubiche complesse di z

$$w'_k = \sqrt[3]{9} \left(\cos \left(\frac{\pi + 2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi + 2k\pi}{3} \right) \right) \quad k=0,1,2$$

scriviamo w_0', w_1', w_2' in forma esponenziale

$$w_0' = \sqrt[3]{9} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{9} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= \frac{\sqrt[3]{9}}{2} + \frac{\sqrt[3]{9}\sqrt{3}}{2}i = \frac{\sqrt[3]{9}}{2} + \frac{\sqrt[3]{27}}{2}i$$

$$w_1' = \sqrt[3]{9} \left(\cos \pi + i \sin \pi \right) = -\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{-9}$$

$$w_2' = \sqrt[3]{9} \left(\cos \left(\frac{5}{3}\pi \right) + i \sin \left(\frac{5}{3}\pi \right) \right) \\ = \sqrt[3]{9} \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt[3]{9}}{2} - \frac{\sqrt[3]{27}}{2}i$$

Infine denotiamo con $w_0'', w_1'', w_2'', w_3''$

$$w_k'' = \sqrt[4]{9} \left(\cos \left(\frac{\pi + 2k\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi + 2k\pi}{4} \right) \right)$$

$$= \sqrt[4]{9} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \right) \right) \quad k=0,1,2,3$$

scriviamo le forme esponenziali di $w_0'', w_1'', w_2'', w_3''$

$$w_0'' = \sqrt[4]{9} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt[4]{9} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt[4]{18}}{2} + i \frac{\sqrt[4]{18}}{2}$$

$$w_1'' = \sqrt[4]{9} \left(\cos \left(\frac{3}{4}\pi \right) + i \sin \left(\frac{3}{4}\pi \right) \right) = \sqrt[4]{9} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{\sqrt[4]{18}}{2} + i \frac{\sqrt[4]{18}}{2}$$

$$w_2'' = \sqrt[4]{9} \left(\cos \left(\frac{5}{4}\pi \right) + i \sin \left(\frac{5}{4}\pi \right) \right) = \sqrt[4]{9} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{\sqrt[4]{18}}{2} - i \frac{\sqrt[4]{18}}{2}$$

$$w_3'' = \sqrt[4]{9} \left(\cos \left(\frac{7}{4}\pi \right) + i \sin \left(\frac{7}{4}\pi \right) \right) = \sqrt[4]{9} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt[4]{18}}{2} - i \frac{\sqrt[4]{18}}{2}$$

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

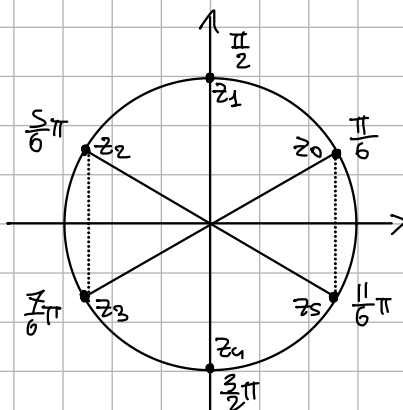
Sia $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ un polinomio di grado n e a coefficienti complessi ($a_0 \neq 0$ e $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$) allora esistono $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ (non necessariamente distinte) tali che $p(z) = a_0 (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$

Esempio $z^6 + 1 = 0$ non ammette radici reali

Tuttavia questa equazione ammette esattamente 6 soluzioni in $\mathbb{C}$

radici seste di $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$

$$z_k = \cos \left(\frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{3} \right) \quad k=0,1,2,3,4,5$$



osserviamo quindi che

$$\bar{z}_0 = z_5$$

$$\bar{z}_1 = z_4$$

$$\bar{z}_2 = z_3$$

TEOREMA delle RADICI COMPLESSE CONIUGATE

Sia $p(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m$ polinomio di grado m e coefficienti reali ($a_0 \neq 0$ e $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$).

Se $p(z_0) = 0$ per qualche $z_0 \in \mathbb{C}$ allora $p(\bar{z}_0) = 0$

Corollario

Sia $p(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m$ polinomio di grado m e coefficienti reali.

Se m è dispari allora $p(x)$ ammette almeno una radice reale.

Esempio 1 le equazioni di II grado $ax^2 + bx + c = 0$ non ammettono radici reali se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Tuttavia possiamo calcolare le radici complesse di queste equazione

$$z_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{dove } \sqrt{\Delta} \text{ sono le due radici complesse di } \Delta < 0$$

Scriviamo $\Delta = -\Delta (\cos \pi + i \sin \pi)$ la forma trigonometrica di Δ denotiamo con π_0, π_1 le radici quadrate di Δ

$$\pi_k = \sqrt{-\Delta} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) \right) \quad k=0,1$$

in forma algebrica otteniamo che

$$\pi_0 = \sqrt{-\Delta} (0 + i \cdot 1) = i \sqrt{-\Delta}$$

$$\pi_1 = \sqrt{-\Delta} (0 + i \cdot (-1)) = -i \sqrt{-\Delta}$$

concludiamo che

$$z_{1/2} = \frac{-b \pm i \sqrt{-\Delta}}{2a}$$

osserviamo che $\bar{z}_1 = z_2$, cioè **un'equazione di II e coefficienti reali con $\Delta < 0$ ammette due radici complesse coniugate**

Esempio 2 le equazioni di II grado a coefficienti complessi, cioè

$$a z^2 + b z + c = 0 \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0$$

si risolvono con la stessa formula risolutiva usata nel caso reale

$$z_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \sqrt{\Delta} \text{ sono le due radici complesse di } \Delta = b^2 - 4ac$$

$\frac{1}{2a}$ significa dividere per $2a$ in $\mathbb{C}$

Esercizio Consideriamo $4z^2 - 4z + 3 - 2\sqrt{3}i = 0$

$$\begin{aligned} \Delta &= (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (3 - 2\sqrt{3}i) = 16(1 - (3 - 2\sqrt{3}i)) = 16(-2 + 2\sqrt{3}i) \\ &= 32(-1 + \sqrt{3}i) = 64\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \end{aligned}$$

Calcoliamo le radici quadrate complesse di Δ

$$|\Delta| = 164 \cdot \left| -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = 64 \cdot 1 = 64$$

determiniamo un argomento φ di Δ

$$\begin{cases} \cos \varphi = -\frac{1}{2} \\ \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{2}{3}\pi$$

$$\Delta = 64 \left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) \right)$$

le radici quadrate complesse di Δ sono

$$r_k = 8 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + k\pi\right) \right) \quad k=0,1$$

$$r_0 = 8 \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} \right) = 8 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 4 + 4\sqrt{3}i$$

$$r_1 = 8 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) \right) = -4 - 4\sqrt{3}i$$

pertanto le radici dell'equazione di partenza sono

$$z_{1,2} = \frac{4 \pm (4 + 4\sqrt{3}i)}{2} \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

osserviamo che $4z^2 - 4z + 3 - 2\sqrt{3}i = 4\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(z - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$