

Nella scorsa lezione abbiamo introdotto:

- Ampliamento di  $\mathbb{R}$ :  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$
- Intorni di  $x_0 \in \mathbb{R}^*$
- Punti di accumulazione di un insieme  $A$  ( $D_A(A)$ )
- Definizione di limite:  
Data  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}$  e dati  $x_0 \in D_A(A)$ ,  $l \in \mathbb{R}^*$ :  
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \forall V \in \mathcal{D}_l \exists U \in \mathcal{D}_{x_0} \text{ t.c. } f(x) \in V$$
  
$$\forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$$
- Limiti di funzioni elementari.
- Punti di accumulazione e limiti da destra / sinistra.

#### ESEMPLI

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

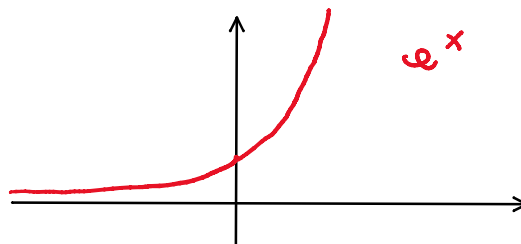
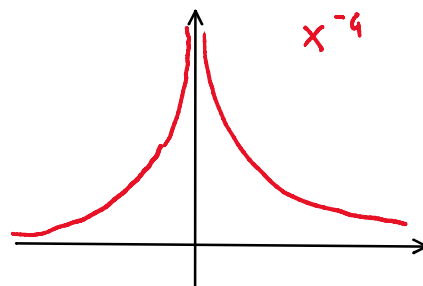
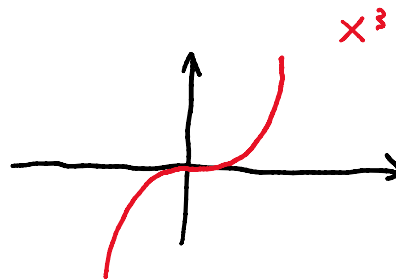
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 2^3 = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{-4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} = +\infty$$

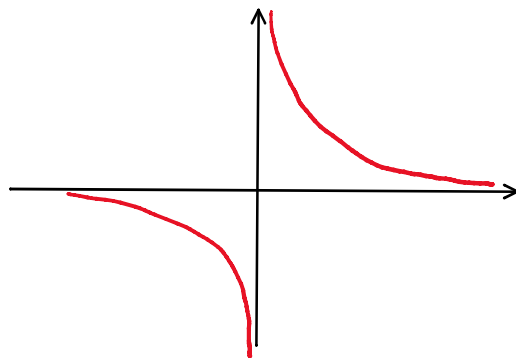
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$



- $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \quad \nexists$

perché:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$



### TEOREMA (UNICITÀ DEL LIMITE)

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  e sia  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ . Siano  $x_0 \in D_f(A)$  e  $l_1, l_2 \in \mathbb{R}^*$ .

Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2$ , allora  $l_1 = l_2$ .

Idea: Se  $l_1 \neq l_2$  si possono prendere  $V_1 \in \mathcal{O}_{l_1}$ ,  $V_2 \in \mathcal{O}_{l_2}$  t.c.

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset.$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \Rightarrow \exists U_1 \in \mathcal{O}_{x_0} \text{ t.c. } f(x) \in V_1 \quad \forall x \in U_1 \cap A \setminus \{x_0\}.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2 \Rightarrow \exists U_2 \in \mathcal{O}_{x_0} \text{ t.c. } f(x) \in V_2 \quad \forall x \in U_2 \cap A \setminus \{x_0\}.$$

Allora se  $x \in U_1 \cap U_2 \cap A \setminus \{x_0\}$  si ha  $f(x) \in V_1 \cap V_2 = \emptyset$ .

### Operazioni tra limiti

#### TEOREMA.

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  e siano  $f_1, f_2: A \rightarrow \mathbb{R}$ . Siano  $x_0 \in D_f(A)$  e  $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$  (per il momento escludiamo  $+\infty$  e  $-\infty$ ).

Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = l_1$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = l_2$  allora:

1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) + f_2(x) = l_1 + l_2$

2) Se  $c \in \mathbb{R}$  allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} c f_1(x) = c l_1$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) - f_2(x) = l_1 - l_2$$

$$4) \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \cdot f_2(x) = l_1 \cdot l_2$$

$$5) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{l_1}{l_2} \quad \text{se } l_2 \neq 0$$

ESEMPI

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} 2e^x + x = 2e^0 + 0 = 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pi} x^3 (\cos x)^3 = \pi^3 (-1)^3 = -\pi^3$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3^x}{x-3} = \frac{3^2}{2-3} = \frac{9}{-1} = -9$$

oss In molti casi le regole per le operazioni tra limiti si applicano anche quando  $l_1, l_2 \in \mathbb{R}^*$ .

Per la somma:

$$\bullet \text{ Se } l_1 = +\infty \text{ e } l_2 \in \mathbb{R} : l_1 + l_2 = +\infty.$$

$$\bullet \text{ Se } l_1 \in \mathbb{R} \text{ e } l_2 = +\infty : l_1 + l_2 = +\infty$$

$$\bullet \text{ Se } l_1 = -\infty \text{ e } l_2 \in \mathbb{R} : l_1 + l_2 = -\infty$$

$$\bullet \text{ Se } l_1 \in \mathbb{R} \text{ e } l_2 = -\infty : l_1 + l_2 = -\infty$$

$$\bullet \text{ Se } l_1 = +\infty \text{ e } l_2 = +\infty : l_1 + l_2 = +\infty$$

$$\bullet \text{ Se } l_1 = -\infty \text{ e } l_2 = -\infty : l_1 + l_2 = -\infty.$$

Attenzione: Non c'è nessuna regola per i casi

$$+\infty + (-\infty) \quad \text{e} \quad -\infty + \infty.$$

Le due forme  $+\infty - \infty$  e  $-\infty + \infty$  sono FORME INDETERMINATE.

Per il prodotto per una costante  $c \in \mathbb{R}$ :

• Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} c f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0 \\ 0 & \text{se } c = 0 \end{cases}$

• Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ , allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} c f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } c > 0 \\ +\infty & \text{se } c < 0 \\ 0 & \text{se } c = 0 \end{cases}$ .

• Per la differenza di due funzioni: le regole si ricavano da quelle della somma e del prodotto per  $-1$ .

• Per il prodotto di due funzioni:

• Se  $l_1 = +\infty$  e  $l_2 \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$ , allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) f_2(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } l_2 > 0 \\ -\infty & \text{se } l_2 < 0 \end{cases}$$

• Se  $l_1 = -\infty$  e  $l_2 \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$ , allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) f_2(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } l_2 > 0 \\ +\infty & \text{se } l_2 < 0 \end{cases}$$

Attenzione  $+\infty \cdot 0$  e  $-\infty \cdot 0$  sono forme indeterminate.

Per il quoziente di due funzioni:

• Se  $l_1 = +\infty$  e  $l_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } l_2 > 0 \\ -\infty & \text{se } l_2 < 0 \end{cases}$$

• Se  $l_1 = -\infty$  e  $l_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \begin{cases} -\infty & \text{se } l_2 > 0 \\ +\infty & \text{se } l_2 < 0 \end{cases}$$

- Se  $l_1 \in \mathbb{R}$  e  $l_2 \in \{-\infty, +\infty\}$ , allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0.$$

Attenzione:  $\frac{+\infty}{+\infty}$  o  $\frac{-\infty}{+\infty}$  o  $\frac{-\infty}{-\infty}$  o  $\frac{+\infty}{-\infty}$  o  $\frac{0}{0}$   
sono forme indeterminate

Attenzione 2: Se  $l_1 \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$  e  $l_2 = 0$ ,  $\frac{l_1}{0}$  non è una forma indeterminata ma il risultato dipende dal segno di  $f_2(x)$ .

### ESEMPLI

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$  (sia numeratore che denominatore sono positivi)
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-3}{x-1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

Def (LIMITI PER ECCESSO) Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  e sia  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ . Siano  $x_0 \in \text{cl}(A)$ ,  $l \in \mathbb{R}$ . Si dice che  $l$  è il **LIMITE PER ECCESSO** di  $f(x)$  per  $x \rightarrow x_0$  se  $\forall V \in \mathcal{D}_l \exists U \in \mathcal{D}_{x_0}$  t.c.  $f(x) \in V \cap (l, +\infty) \quad \forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$ .

(Si scrive che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l^+$ )

In modo simile:

Def (LIMITI PER DIFETTO) Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  e sia  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ . Siano  $x_0 \in \text{Dn}(A)$ ,  $l \in \mathbb{R}$ . Si dice che  $l$  è il **LIMITE PER DIFETTO** DI  $f(x)$  PER  $x \rightarrow x_0$  se:  $\forall V \in \mathcal{D}_l \exists U \in \mathcal{D}_{x_0}$  t.c.  $f(x) \in V \cap (l, +\infty)$   $\forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$ .  
(Si scrive che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ )

Nota: Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = l_1 \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$  e

$\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = 0^+$  allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } l_1 > 0 \\ -\infty & \text{se } l_1 < 0. \end{cases}$$

Analogamente, se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = 0^-$ , allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \begin{cases} -\infty & \text{se } l_1 > 0 \\ +\infty & \text{se } l_1 < 0. \end{cases}$$

ESEMPLI

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)(1+x)} \quad \frac{1}{0} ?$$

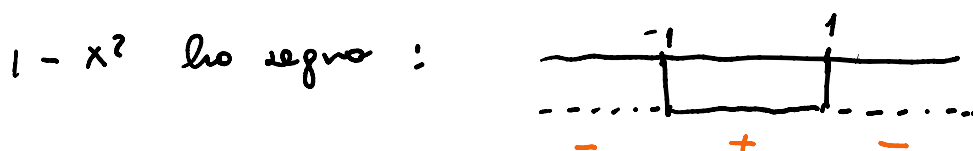
Distinguiamo limite destro e sinistro:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{0^- \cdot 2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{0^+ \cdot 2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Quindi  $\nexists \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x^2}$ .

Altro metodo: Studio del segno:





$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \frac{1}{x} - 1 \right) = +\infty (0 - 1) = +\infty \cdot (-1) = -\infty.$$

Regola generale: Se  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x)$  dipende da  $a_n$  cioè:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_n > 0 \\ -\infty & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$$

• Analogamente, se  $x \rightarrow -\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ è pari e } a_n > 0 \\ +\infty & \text{se } n \text{ è dispari e } a_n < 0 \\ -\infty & \text{se } n \text{ è pari e } a_n < 0 \\ -\infty & \text{se } n \text{ è dispari e } a_n > 0 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x + x^4 - x^5$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \left( \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x} - 1 \right) = -\infty (-1) = +\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 1} \quad \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{f.i.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} (1 + \frac{1}{x^2})}{\cancel{x^2} (2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})} = \frac{1 + 0}{2 + 0 + 0} = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^3}{2x^2 + x + 1} \quad \frac{-\infty}{+\infty} \quad \text{f.i.}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left( \frac{1}{x^3} - 1 \right)}{x^2 \left( 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left( \frac{1}{x^3} - 1 \right)}{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{+\infty (-1)}{2} = -\infty$$

• In modo simile

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x^3}{2x^2+x+1} = +\infty.$$

Regola generale: Se  $p(x)$  e  $q(x)$  sono due polinomi possiamo calcolare  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p(x)}{q(x)}$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{p(x)}{q(x)}$

raccolgendo i termini di grado massimo

In particolare:

• Se  $\deg(p(x)) = \deg(q(x))$ , allora:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \text{ e' il rapporto}$$

tra i coeff. dei termini di grado max.

• Se  $\deg(q(x)) > \deg(p(x))$  allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = 0.$$

• Se  $\deg(p(x)) > \deg(q(x))$  il risultato e'  $+\infty$  o  $-\infty$  a seconda dei segni di  $p$  e  $q$ .

E se vogliamo calcolare  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{p(x)}{q(x)}$  con  $x_0 \in \mathbb{R}$ ?

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3} \quad \frac{0}{0} \quad \text{f.i.}$$

Factorizziamo numeratore e denominatore:

- $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$
- $x^2 + 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{1+3} = \begin{matrix} 1 \\ -3 \end{matrix}$   
quindi:  $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

In generale:

Per calcolare  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{p(x)}{q(x)}$  con  $x_0 \in \mathbb{R}$ :

- Se  $q(x_0) \neq 0$ , il risultato è  $\frac{p(x_0)}{q(x_0)}$ .

- Se  $q(x_0) = 0$  e  $p(x_0) \neq 0$ .

Il risultato può essere  $+\infty$ ,  $-\infty$  o  $\nexists$  a seconda dei segni

- Se  $q(x_0) = 0$  e  $p(x_0) = 0$  si dividono per  $x - x_0$  sia  $p(x)$  che  $q(x)$ .

### TEOREMA (LIMITI DI COMPOSIZIONI DI FUNZIONI)

Siano  $f_1: A \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f_2: B \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $f_1(A) \subseteq B$ . Siano  $x_0 \in \text{Dom}(A)$ ,  $y_0 \in \text{Dom}(B)$  e  $l \in \mathbb{R}^*$ .

Assumiamo che:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = y_0$
- 2)  $\lim_{x \rightarrow y_0} f_2(x) = l$
- 3)  $\exists U \subset \text{Dom}(A)$  t.c.  $f_1(x) \neq y_0 \quad \forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$ .

(  $f(x) \neq y_0$  in un intorno di  $x_0$  )

Allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(f_1(x)) = l$ .

Note: L'ipotesi 3) si può ignorare se  $y_0 \in B$  e  $g(y_0) = l$  oppure se  $y_0 \in \{+\infty, -\infty\}$ .

#### • ESEMPI

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{21+x^2}$$

$$\sqrt{21+x^2} = f_2(f_1(x)) \text{ dove}$$

$$f_2(x) = \sqrt{x}$$

$$f_1(x) = 21+x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 21+x^2 = 21+4 = 25 = y_0$$

$$\lim_{x \rightarrow 25} \sqrt{x} = 5$$

$$\text{Quindi: } \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{21+x^2} = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \underbrace{\sqrt{21+x^2}}_y = \lim_{y \rightarrow 25} \sqrt{y} = \sqrt{25} = 5.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{\frac{1}{x}} = 2^0 = 1 \quad \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow 0} 2^y = 2^0 = 1 \right)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} 2^y = 0.$$