MATEMATICA - LEZIONE 14

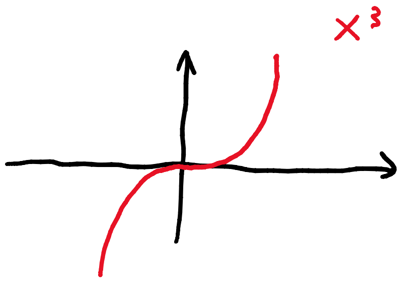
mercoledì 25 ottobre 2023 09:06

Nella scorsa lezione abbiamo introdotto:

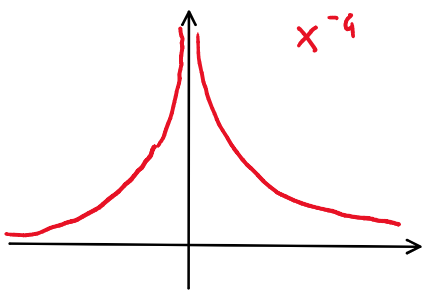
- Ampliamento di $\mathbb{R}$: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$
- Intorni di $x_0 \in \mathbb{R}^*$
- Punti di accumulazione di un insieme A ($D(A)$)
- Definizione di limite:
  Data $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ e dati $x_0 \in D(A)$, $\ell \in \mathbb{R}^*$:
  $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall V \in \mathcal{I}_\ell \quad \exists U \in \mathcal{I}_{x_0} \text{ t.c. } f(x) \in V \quad \forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$$
- limiti di funzioni elementari.
- Punti di accumulazione e limiti da destra/sinistra.

ESEMPI

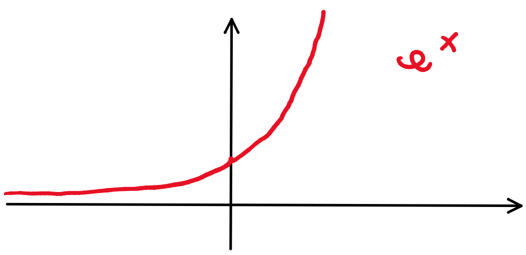
- $\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim_{x \to 2} x^3 = 2^3 = 8$



- $\lim_{x \to +\infty} x^{-4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^4}$
- $\lim_{x \to 0} x^{-4} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^4} = +\infty$



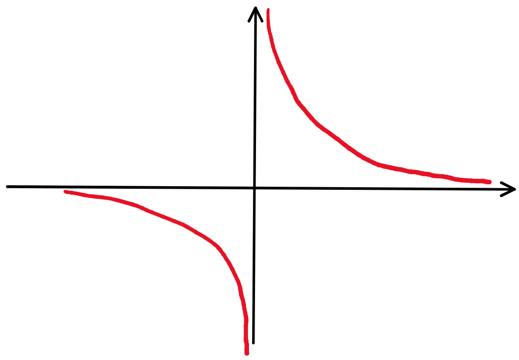
- $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$



- $\lim_{x \to 0} x^{-3} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3} \quad \nexists$

  perché:

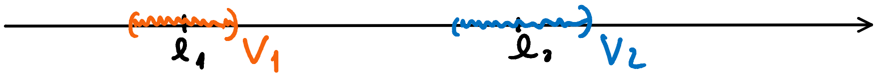
- $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$ e $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$



TEOREMA (UNICITÁ DEL LIMITE)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \to \mathbb{R}$. Siano $x_0 \in D_r(A)$ e $l_1, l_2 \in \mathbb{R}^*$.
Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$, allora $l_1 = l_2$.

Idea: Se $l_1 \neq l_2$ si possono prendere $V_1 \in \mathcal{D}_{l_1}$, e $V_2 \in \mathcal{D}_{l_2}$ t.c. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.



$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \Rightarrow \exists U_1 \in \mathcal{D}_{x_0}$ t.c. $f(x) \in V_1 \quad \forall x \in U_1 \cap A \setminus \{x_0\}$.

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2 \Rightarrow \exists U_2 \in \mathcal{D}_{x_0}$ t.c. $f(x) \in V_2 \quad \forall x \in U_2 \cap A \setminus \{x_0\}$.

Allora se $x \in U_1 \cap U_2 \cap A \setminus \{x_0\}$ si ha $f(x) \in V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Operazioni tra limiti

TEOREMA.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e siano $f_1, f_2 : A \to \mathbb{R}$. Siano $x_0 \in D_r(A)$ e $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ (per il momento escludiamo $+\infty$ e $-\infty$).

Se $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = l_1$ e $\lim_{x \to x_0} f_2(x) = l_2$ allora:

1) $\lim_{x \to x_0} f_1(x) + f_2(x) = l_1 + l_2$

2) Se $c \in \mathbb{R}$ allora $\lim_{x \to x_0} c\, f_1(x) = c\, l_1$

3) $\lim_{x \to x_0} f_1(x) - f_2(x) = \ell_1 - \ell_2$

4) $\lim_{x \to x_0} f_1(x) \cdot f_2(x) = \ell_1 \cdot \ell_2$

5) $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$ $\boxed{\text{se } \ell_2 \neq 0}$

ESEMPI

- $\lim_{x \to 0} 2e^x + x = 2e^0 + 0 = 2$
- $\lim_{x \to \pi} x^3 (\cos x)^3 = \pi^3 (-1)^3 = -\pi^3$
- $\lim_{x \to 2} \dfrac{3^x}{x-3} = \dfrac{3^2}{2-3} = \dfrac{9}{-1} = -9$

OSS In molti casi le regole per le operazioni tra limiti si applicano anche quando $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}^*$.

Per la somma:

- Se $\ell_1 = +\infty$ e $\ell_2 \in \mathbb{R}$: $\ell_1 + \ell_2 = +\infty$.
- Se $\ell_1 \in \mathbb{R}$ e $\ell_2 = +\infty$: $\ell_1 + \ell_2 = +\infty$
- Se $\ell_1 = -\infty$ e $\ell_2 \in \mathbb{R}$: $\ell_1 + \ell_2 = -\infty$
- Se $\ell_1 \in \mathbb{R}$ e $\ell_2 = -\infty$: $\ell_1 + \ell_2 = -\infty$
- Se $\ell_1 = +\infty$ e $\ell_2 = +\infty$: $\ell_1 + \ell_2 = +\infty$
- Se $\ell_1 = -\infty$ e $\ell_2 = -\infty$: $\ell_1 + \ell_2 = -\infty$.

Attenzione: Non c'è nessuna regola per i casi $+\infty + (-\infty)$ o $-\infty + \infty$.
Si dice che $+\infty - \infty$ e $-\infty + \infty$ sono FORME INDETERMINATE.

Per il prodotto per una costante $c \in \mathbb{R}$:

- Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, allora $\lim_{x \to x_0} c f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0 \\ 0 & \text{se } c = 0 \end{cases}$

- Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, allora $\lim_{x \to x_0} c f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } c > 0 \\ +\infty & \text{se } c < 0 \\ 0 & \text{se } c = 0. \end{cases}$

- Per la differenza di due funzioni: le regole si ricavano da quelle della somma e del prodotto per -1.

- Per il prodotto di due funzioni.
  - Se $l_1 = +\infty$ e $l_2 \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$, allora:

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) f_2(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } l_2 > 0 \\ -\infty & \text{se } l_2 < 0 \end{cases}$$

  - Se $l_1 = -\infty$ e $l_2 \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$, allora:

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) f_2(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } l_2 > 0 \\ +\infty & \text{se } l_2 < 0. \end{cases}$$

Attenzione $+\infty \cdot 0$ e $-\infty \cdot 0$ sono forme indeterminate.

Per il quoziente di due funzioni:

- Se $l_1 = +\infty$ e $l_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } l_2 > 0 \\ -\infty & \text{se } l_2 < 0 \end{cases}$$

- Se $l_1 = -\infty$ e $l_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \begin{cases} -\infty & \text{se } l_2 > 0 \\ +\infty & \text{se } l_2 < 0 \end{cases}$$

- Se $\ell_1 \in \mathbb{R}$ e $\ell_2 \in \{-\infty, +\infty\}$, allora:
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0 .$$

Attenzione: $\frac{+\infty}{+\infty}$ o $\frac{-\infty}{+\infty}$ o $\frac{-\infty}{-\infty}$ o $\frac{+\infty}{-\infty}$ o $\frac{0}{0}$ sono forme indeterminate

Attenzione 2: Se $\ell_1 \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$ e $\ell_2 = 0$, $\frac{\ell_1}{0}$ non è una forma indeterminata ma il risultato dipende dal segno di $f_2(x)$.

ESEMPI

- $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ (sia numeratore che denominatore sono positivi)

- $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^5} = -\infty$

- $\lim_{x \to 1^+} \frac{x-3}{x-1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$

- $\lim_{x \to 0} \frac{1}{1-\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

Def (LIMITI PER ECCESSO) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \to \mathbb{R}$. Siano $x_0 \in Dr(A)$, $\ell \in \mathbb{R}$. Si dice che ℓ è il LIMITE PER ECCESSO DI $f(x)$ PER $x \to x_0$ se $\forall V \in \mathcal{I}_\ell \; \exists U \in \mathcal{I}_{x_0}$ t.c. $f(x) \in V \cap (\ell, +\infty)$ $\forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$.
(Si scrive che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell^+$)

In modo simile:

Def (LIMITI PER DIFETTO) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Siano $x_0 \in D(A)$, $\ell \in \mathbb{R}$. Si dice che ℓ è il LIMITE PER DIFETTO DI $f(x)$ PER $x \to x_0$ se: $\forall\, V \in \mathcal{I}_\ell \ \exists\, U \in \mathcal{I}_{x_0}$ t.c. $f(x) \in V \cap (\ell, +\infty)$ $\forall\, x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$.

(Si scrive che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$)

Nota: Se $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$ e $\lim_{x \to x_0} f_2(x) = 0^+$ allora:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \ell_1 > 0 \\ -\infty & \text{se } \ell_1 < 0. \end{cases}$$

Analogamente, se $\lim_{x\to x_0} f_2(x) = 0^-$, allora:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \begin{cases} -\infty & \text{se } \ell_1 > 0 \\ +\infty & \text{se } \ell_1 < 0. \end{cases}$$

ESEMPI

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x^2} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(1-x)(1+x)} \qquad \frac{1}{0} \ ?$$

Distinguiamo limite destro e sinistro:

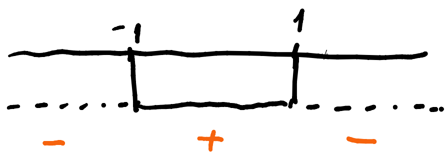
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x^2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{0^- \cdot 2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x^2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{0^+ \cdot 2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Quindi $\nexists \lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x^2}$.

Altro metodo: studio del segno:

$1 - x^2$ ha segno:



$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{1-x^2} = +\infty$$

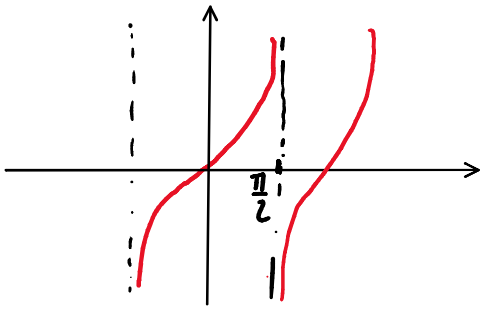
$$\lim_{x\to -1^-} \frac{1}{1-x^2} = -\infty.$$

ESEMPI DI RIEPILOGO

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - 3x =$

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\, e^{x} = +\infty \cdot +\infty = +\infty$

- $\displaystyle\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{x}{\tan x} = \frac{\frac{\pi}{2}}{-\infty} = 0$



$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{x}{\tan x} = \frac{\frac{\pi}{2}}{+\infty} = 0$$

Quindi $\exists \displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x} = 0.$

- $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{1-x}{(x-2)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty.$

- $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{1-x}{x-2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$ (segno di $x-2$: $\overset{2}{\underset{-\quad\quad +}{\text{----|——}}}$)

Esempi di forme indeterminate :

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x - x^2$ $\quad +\infty - (+\infty)$ $\quad$ f. i.

$$= \lim_{x \to +\infty} x^2 \left(\frac{1}{x} - 1\right) = +\infty \,(0 - 1) = +\infty \cdot (-1) = -\infty .$$

Regola generale: Se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$

$\lim_{x \to +\infty} p(x)$ dipende da a_n cioè:

- $$\lim_{x \to +\infty} p(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_n > 0 \\ -\infty & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$$

- Analogamente, se $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} p(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ è pari e } a_n > 0 \\ +\infty & \text{se } n \text{ è dispari e } a_n < 0 \\ -\infty & \text{se } n \text{ dispari e } a_n > 0 \\ -\infty & \text{se } n \text{ è pari e } a_n < 0 \end{cases}$$

- $$\lim_{x \to -\infty} x + x^4 - x^5$$

$$= \lim_{x \to -\infty} x^5 \left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x} - 1\right) = -\infty \,(-1) = +\infty .$$

- $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 1} \qquad \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{f.i.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1 + 0}{2 + 0 + 0} = \frac{1}{2}$$

- $$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - x^3}{2x^2 + x + 1} \qquad \frac{-\infty}{+\infty} \quad \text{f.i.}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3\left(\frac{1}{x^3} - 1\right)}{x^2\left(2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(\frac{1}{x^3} - 1\right)}{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{+\infty \, (-1)}{2} = -\infty$$

- In modo simile

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1-x^3}{2x^2+x+1} = +\infty .$$

Regole generali: Se $p(x)$ e $q(x)$ sono due polinomi possiamo calcolare $\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{q(x)}$ e $\lim_{x\to-\infty} \frac{p(x)}{q(x)}$ raccogliendo i termini di grado massimo. In particolare:

- Se $\deg(p(x)) = \deg(q(x))$, allora: $\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{p(x)}{q(x)}$ è il rapporto tra i coeff. dei termini di grado max.
- Se $\deg(q(x)) > \deg(p(x))$ allora $\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = 0.$
- Se $\deg(p(x)) > \deg(q(x))$ il risultato è $+\infty$ o $-\infty$ a seconda dei segni di p e q.

E se vogliamo calcolare $\lim_{x\to x_0} \frac{p(x)}{q(x)}$ con $x_0 \in \mathbb{R}$?

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+2x-3} \qquad \frac{0}{0} \qquad \text{f.i.}$$

Fattorizziamo numeratore e denominatore:

- $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$
- $x^2+2x-3 = 0 \iff x = -1 \pm \sqrt{1+3} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$

quindi $x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^2+2x-3} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+3)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x+3}$$

$$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

<u>In generale</u>:

Per calcolare $\lim_{x \to x_0} \frac{p(x)}{q(x)}$ con $x_0 \in \mathbb{R}$:

- Se $q(x_0) \neq 0$, il risultato è $\frac{p(x_0)}{q(x_0)}$.
- Se $q(x_0) = 0$ e $p(x_0) \neq 0$.
  Il risultato può essere $+\infty, -\infty$ o $\nexists$ a seconda dei segni
- Se $q(x_0) = 0$ e $p(x_0) = 0$ si dividono per $x - x_0$ sia $p(x)$ che $q(x)$.

TEOREMA (LIMITI DI COMPOSIZIONI DI FUNZIONI)

Siano $f_1 : A \to \mathbb{R}$ e $f_2 : B \to \mathbb{R}$ tali che $f_1(A) \subseteq B$. Siano $x_0 \in D_r(A)$, $y_0 \in D_r(B)$ e $\ell \in \mathbb{R}^*$.

Assumiamo che:

1) $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = y_0$

2) $\lim_{x \to y_0} f_2(x) = \ell$

3) $\exists U \in \mathcal{I}_{x_0}$ t.c. $f_1(x) \neq y_0 \quad \forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$.

($f(x) \neq y_0$ in un intorno di x_0)

Allora $\lim_{x \to x_0} f_2(f_1(x)) = \ell$.

Nota: L'ipotesi 3) si può ignorare se $y_0 \in B$ e $f_2(y_0) = \ell$ oppure se $y_0 \in \{+\infty, -\infty\}$.

- ESEMPI

$\lim_{x \to 2} \sqrt{21 + x^2}$

$\sqrt{21+x^2} = f_2(f_1(x))$ dove

$f_2(x) = \sqrt{x}$

$f_1(x) = 21 + x^2$

$\lim_{x \to 2} 21 + x^2 = 21 + 4 = 25 = y_0$

$\lim_{x \to 25} \sqrt{x} = 5$

Quindi: $\lim_{x \to 2} \sqrt{21+x^2} = 5$

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{\underbrace{21+x^2}_{y}} = \lim_{y \to 25} \sqrt{y} = \sqrt{25} = 5.$$

- $\lim_{x \to +\infty} 2^{\frac{1}{x}} = 2^0 = 1 \quad \left(\lim_{x \to +\infty} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to 0} 2^y = 2^0 = 1 \right)$

- $\lim_{x \to 0^-} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to -\infty} 2^y = 0.$