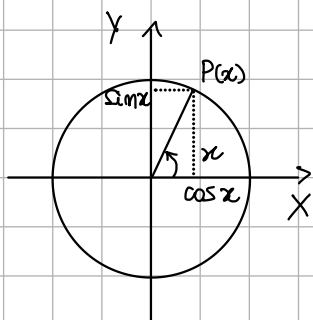


Sia $x \in \mathbb{R}$, denotiamo $P(x)$ il punto sulla CIRCONFERENZA GONIOMETRICA (circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine di un riferimento cartesiano $X^2 + Y^2 = 1$) individuato dall'angolo orientato x e partire dal punto $(1,0)$

- se $x > 0$ il punto $P(x)$ si ottiene percorrendo in senso antiorario un arco di lunghezza x
- se $x < 0$ il punto $P(x)$ si ottiene percorrendo in senso orario un arco di lunghezza $-x$
- se $x = 0$ allora $P(x) = (1,0)$

Definizione Sia $x \in \mathbb{R}$ le coordinate del punto $P(x)$ si denotano $(\cos x, \sin x)$ e si chiamano rispettivamente COSENO e SENO di x



Osservazione Poiché la lunghezza della circonferenza unitaria è 2π , fissato $x \in \mathbb{R}$ allora tutti gli archi del tipo $x + 2k\pi$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$ individuano lo stesso punto sulla circonferenza goniometrica

In termini di seno e coseno la proprietà precedente si riscrive come

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{Z} : \quad \begin{aligned} \cos(x + 2k\pi) &= \cos x \\ \sin(x + 2k\pi) &= \sin x \end{aligned}$$

Se conosciamo $\sin, \cos$ su $[0, 2\pi)$ dalle relazioni precedenti possiamo ricostruire seno e coseno su $\mathbb{R}$

Definizione Sia $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e $T > 0$. Consideriamo $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice che f è una FUNZIONE PERIODICA di periodo T (oppure T -periodica) se sono verificate le seguenti proprietà:

- $\forall x \in A : x - T, x + T \in A$
- $\forall x \in A : f(x + T) = f(x)$

Con il linguaggio precedente possiamo dire che le funzioni $\sin, \cos$ sono funzioni 2π -periodiche

Osservazione Poiché $P(x)$ appartiene alla circonferenza goniometrica $\forall x \in \mathbb{R} : \cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (1ª relazione fondamentale del goniometrico)

$$\cos 0 = 1$$

$$\sin 0 = 0$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0$$

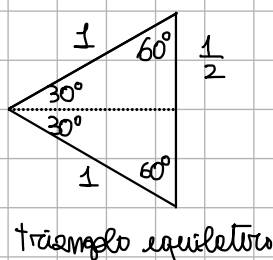
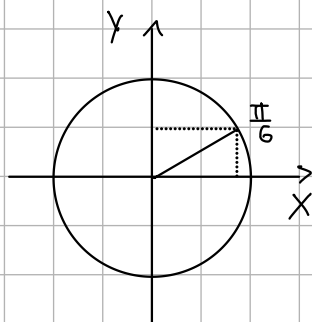
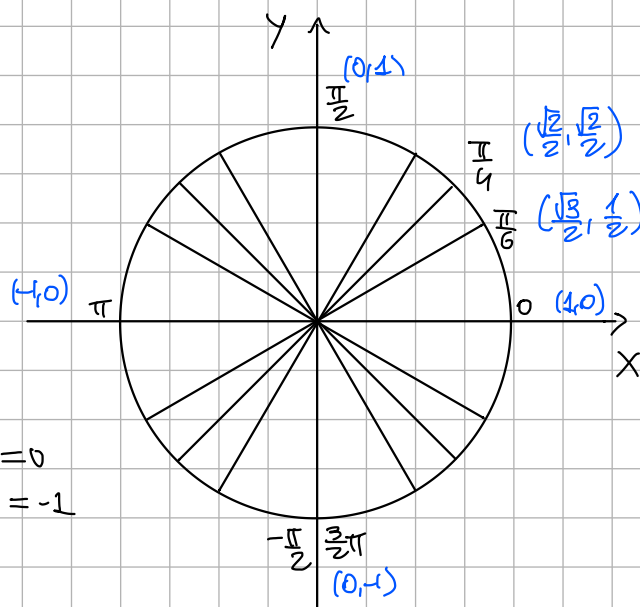
$$\sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos \pi = -1$$

$$\sin \pi = 0$$

$$\cos \left(\frac{3}{2}\pi\right) = \cos \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

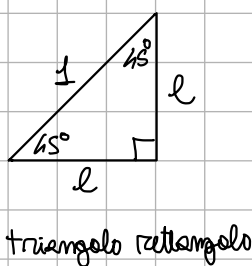
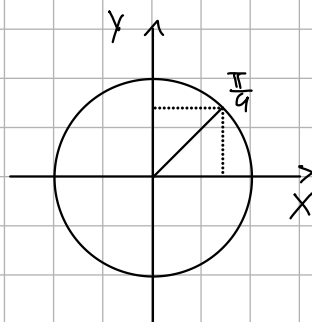
$$\sin \left(\frac{3}{2}\pi\right) = \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$



$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

teorema di Pitagora



$$1 = l^2 + l^2 \Rightarrow 1 = 2l^2 \Rightarrow l^2 = \frac{1}{2}$$

teorema di Pitagora $\Rightarrow l = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

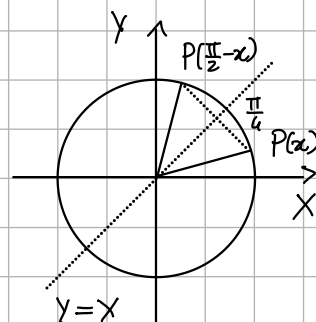
$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Formule degli archi associati

- Simmetrie rispetto alle bisettrici del I e III quadranti

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$



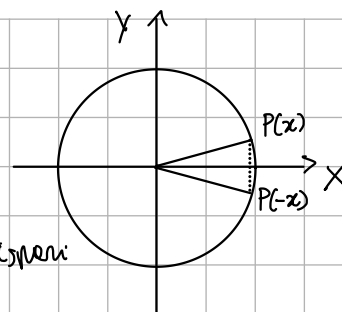
- Simmetria rispetto all'asse X

$$\cos(-x) = \cos x = \cos(2\pi - x)$$

$$\sin(-x) = -\sin x = \sin(2\pi - x)$$

In particolare i) $\cos$ è una funzione pari, $\sin$ è una funzione dispari

ii) ci sono due angoli $x, -x$ con lo stesso coseno

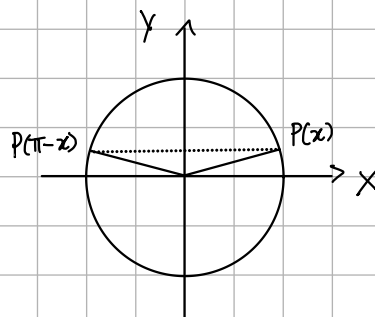


- Simmetria rispetto all'asse Y

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

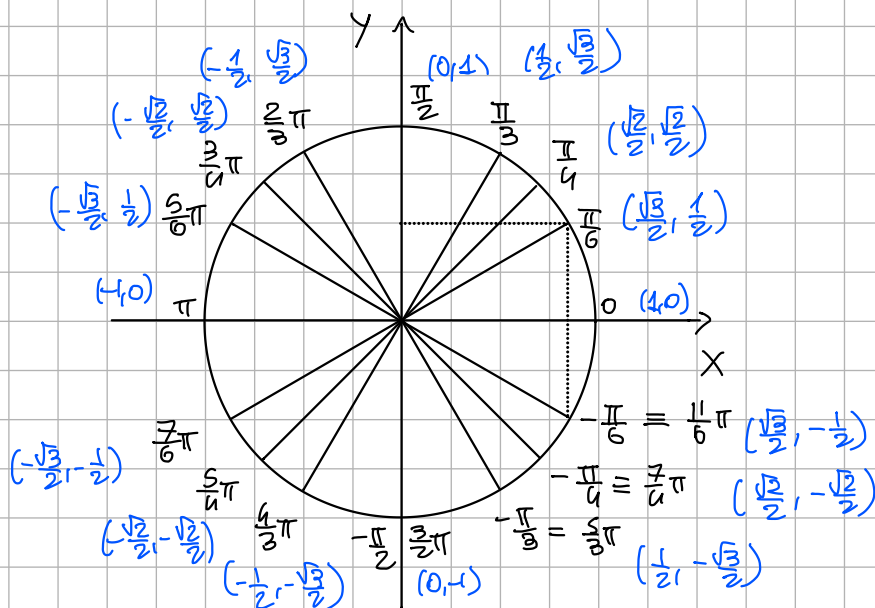
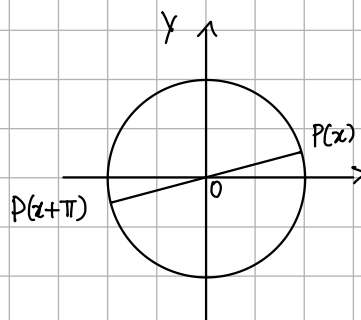
In particolare ci sono due angoli $\pi - x, x$ con lo stesso seno



- Simmetria rispetto all'origine (= rotazione di 180°)

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$



Definizione

Si chiama funzione TANGENTE la seguente funzione

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Si chiama funzione COTANGENTE la funzione

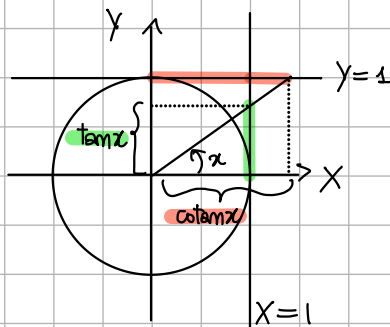
$$\cot x := \frac{\cos x}{\sin x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{ k\pi : k \in \mathbb{Z} \}$$

Osservazione Dalle formule degli archi associati segue che $\tan$, $\cotan$ sono funzioni π -periodiche

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

$$\cotan x = \frac{1}{\tan x} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \left\{ k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cotan x$$

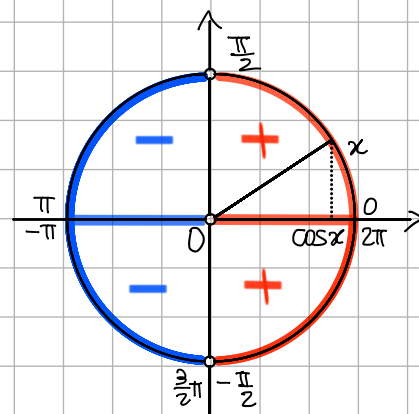
x	$\tan x$	$\cotan x$
$\pi/2$	$\nexists$	0
$\pi/3$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	1	1
$\pi/6$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
0	0	$\nexists$
$-\pi/6$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}$
$-\pi/4$	-1	-1
$-\pi/3$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}/3$
$-\pi/2$	$\nexists$	0



FUNZIONE COSENO

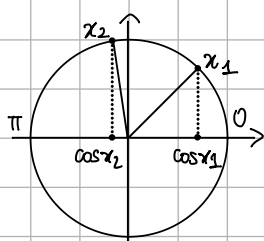
$$\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

- il dominio di $\cos$ è $\mathbb{R}$
- il codominio di $\cos$ è $[-1, 1]$
- $\cos$ è una funzione pari $\forall x \in \mathbb{R} : \cos(-x) = \cos x$
- $\cos$ è 2π -periodica $\forall x \in \mathbb{R} : \cos(x+2\pi) = \cos x$
- $\cos$ è strettamente positiva $(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
- $\cos$ è strettamente negativa $(\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\cos$ è strettamente decrescente $[2k\pi, \pi+2k\pi] \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
- $\cos$ è strettamente crescente $[\pi+2k\pi, 2\pi+2k\pi] \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
- $\cos$ è una funzione limitata sia superiormente che inferiormente



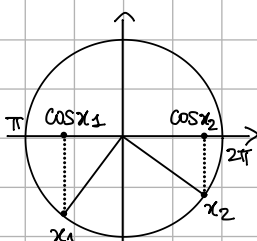
$$\sup_{\mathbb{R}} \cos = 1, \quad \inf_{\mathbb{R}} \cos = -1$$

- $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ sono i punti di massimo $\cos(2k\pi) = 1 = \max_{\mathbb{R}} \cos$
- $x = \pi+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ sono i punti di minimo $\cos(\pi+2k\pi) = -1 = \min_{\mathbb{R}} \cos$
- $\cos|_{[0,\pi]} : [0,\pi] \rightarrow [-1,1]$ è strettamente decrescente e surgettiva, la cui funzione inversa si chiama FUNZIONE ARCCOSENSO e si denota $\arccos$



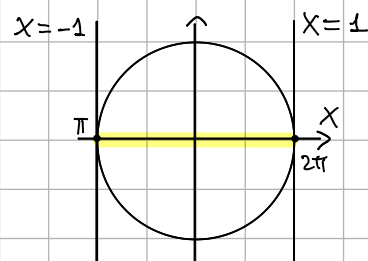
$$\forall x_1, x_2 \in [0, \pi]:$$

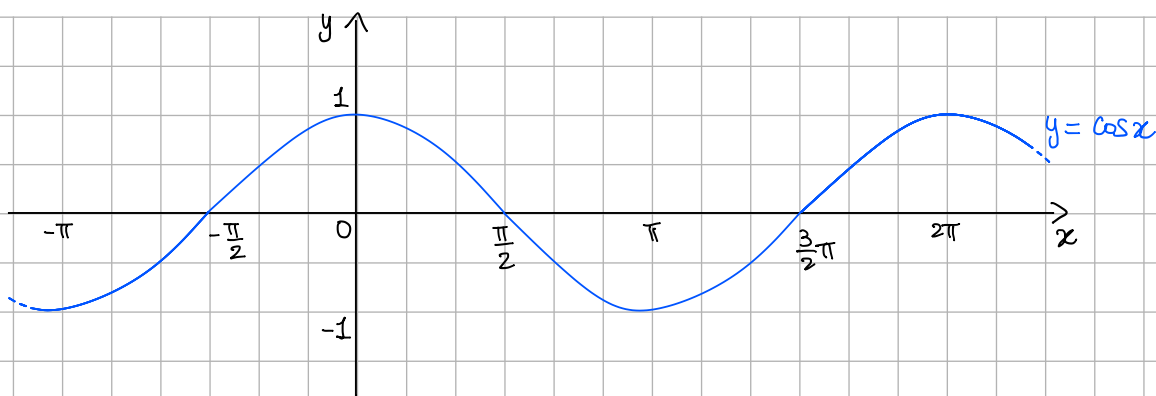
$$x_1 < x_2 \Rightarrow \cos x_1 > \cos x_2$$



$$\forall x_1, x_2 \in [\pi, 2\pi]:$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \cos x_1 < \cos x_2$$





$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$
 $\forall x \in [-1, 1] \quad y = \arccos x \Leftrightarrow y \text{ è l'unico arco in } [0, \pi] \text{ tale } \cos y = x$

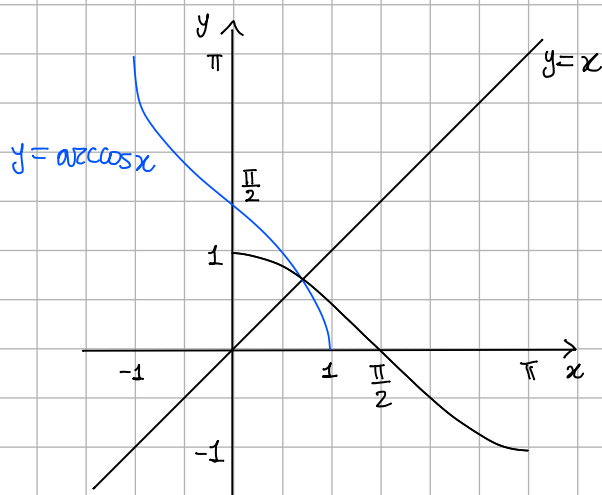
- il dominio di $\arccos$ è $[-1, 1]$
- il codominio di $\arccos$ è $[0, \pi]$
- $\arccos$ è una funzione strettamente decrescente
- $\arccos x = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $\arccos$ è strettamente positivo in $(-1, 1)$
- $\arccos$ è limitata

$$\inf_{[-1, 1]} \arccos = 0 = \arccos 1$$

$x = 1$ è punto di minimo

$$\sup_{[-1, 1]} \arccos = \pi = \arccos(-1)$$

$x = -1$ è punto di massimo

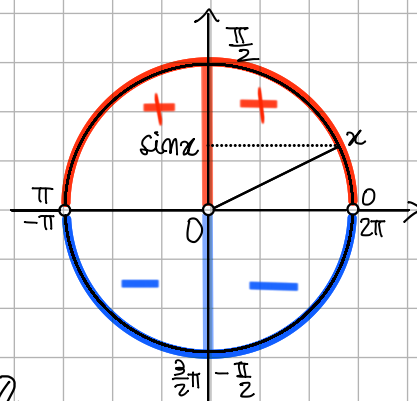


x	$\arccos x$
-1	π
$-\sqrt{3}/2$	$5\pi/6$
$-\sqrt{2}/2$	$3\pi/4$
$-1/2$	$2\pi/3$
0	$\pi/2$
$1/2$	$\pi/3$
$\sqrt{2}/2$	$\pi/4$
$\sqrt{3}/2$	$\pi/6$
1	0

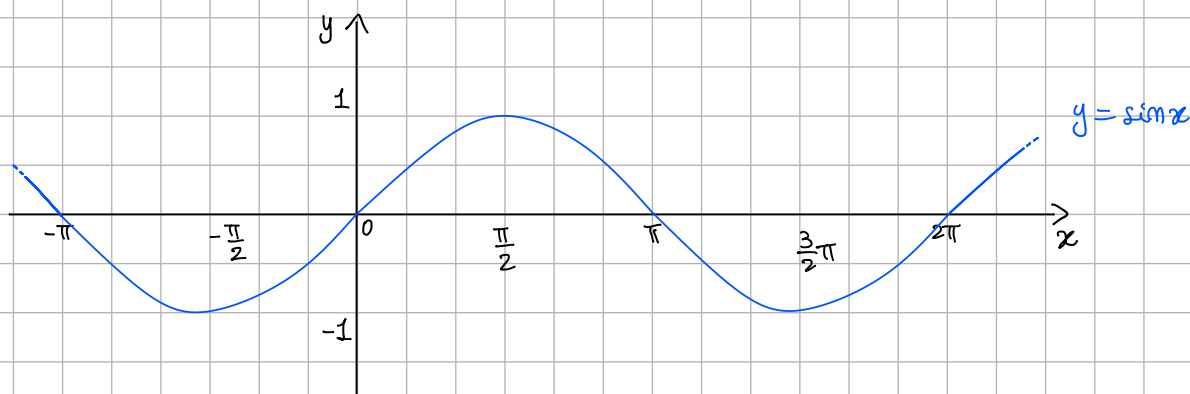
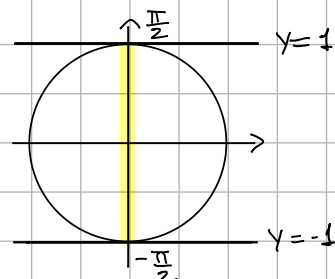
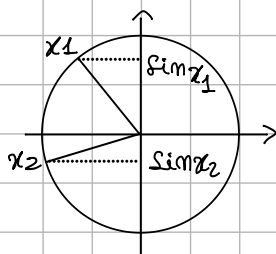
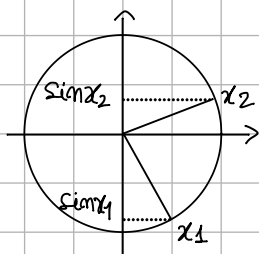
FUNZIONE SENO

$$\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

- il dominio di $\sin$ è $\mathbb{R}$
- il codominio di $\sin$ è $[-1, 1]$
- $\sin$ è una funzione dispari $\forall x \in \mathbb{R} : \sin(-x) = -\sin x$
- $\sin$ è 2π -periodica $\forall x \in \mathbb{R} : \sin(x + 2\pi) = \sin x$
- $\sin$ è strettamente positiva in $(2k\pi, \pi + 2k\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
- $\sin$ è strettamente negativa in $(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$



- $\sin$ è strettamente crescente in $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi] \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
- $\sin$ è strettamente decrescente in $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi] \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
- $\sin$ è limitata sia inferiormente che superiormente $\sup_{\mathbb{R}} \sin = 1, \inf_{\mathbb{R}} \sin = -1$
- $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ sono punti di massimo, ovvero $\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1 = \max_{\mathbb{R}} \sin$
- $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ sono punti di minimo, ovvero $\sin(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1 = \min_{\mathbb{R}} \sin$
- $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ è strettamente crescente e surgettiva, la sua funzione inversa si chiama funzione ARCOSENO e si denota $\arcsin$



$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\forall x \in [-1, 1] : y = \arcsin x \quad (\Leftrightarrow) \quad y \text{ è l'unico arco in } [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ tale che } \sin y = x$$

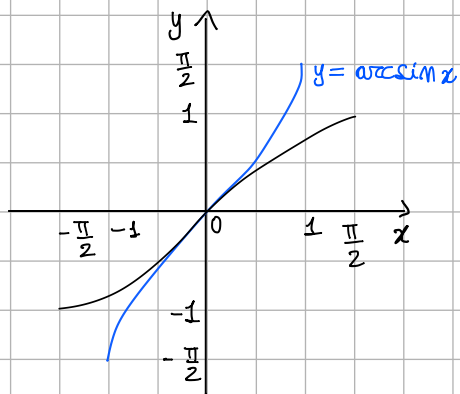
- il dominio di $\arcsin$ è $[-1, 1]$
- il codominio di $\arcsin$ è $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- $\arcsin$ è una funzione dispari
- $\arcsin$ è una funzione strettamente crescente
- $\arcsin$ è strettamente positiva in $(0, 1]$
- $\arcsin$ è strettamente negativa in $[-1, 0)$
- $\arcsin x = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x = 0$
- $\arcsin$ è limitata

$$\sup_{[-1, 1]} \arcsin = \frac{\pi}{2} = \arcsin(1)$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ è punto di massimo di } \arcsin$$

$$\inf_{[-1, 1]} \arcsin = -\frac{\pi}{2} = \arcsin(-1)$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ è punto di minimo di } \arcsin$$



x	$\arcsin x$
-1	$-\pi/2$
$-\sqrt{3}/2$	$-\pi/3$
$-\sqrt{2}/2$	$-\pi/4$
$-1/2$	$-\pi/6$
0	0
$1/2$	$\pi/6$
$\sqrt{2}/2$	$\pi/4$
$\sqrt{3}/2$	$\pi/3$
1	$\pi/2$