MATEMATICA - LEZIONE 1

Docenti:

Gabriele Mancini
gabriele.mancini@uniba.it

Alessandro Palmieri
alessandro.palmieri@uniba.it

Dipartimento di Matematica
ufficio: secondo piano, stanza 30

Ricevimento: lunedì 14:30 - 16:30
Nota: il ricevimento del 2 ottobre è posticipato al 4 ottobre dalle 14:00 alle 16:00

Pagina web: https://www.dm.uniba.it/members/mancini

Canale teams del corso: codice **i6hfurs**

Tutor:
Antonella Carbonara
a.carbonara27@studenti.uniba.it
Canale teams del tutorato: codice **6sap0qi**

Lezioni
- Lunedì 9:00 - 11:00
- Mercoledì 9:00 - 11:00
- Giovedì 14:30 - 16:30
- Venerdì 11:00 - 13:00 (inizio alle 11:10)

Esame
- Prova scritta (calendario indicato sulla pagina del dipartimento)
- Prova orale (qualche giorno dopo la prova scritta)

Programma del corso:

1. Richiami:
   - Insiemi e Logica
   - Numeri (insiemi numerici)
   - Equazioni e disequazioni
   - Funzioni
   - successioni

2. Funzioni di una variabile

   - funzioni reali di variabile reale:
     - Limiti
     - Continuità
     - Derivabilità e calcolo differenziale
     - Grafici di funzioni
     - Ottimizzare funzioni (trovare massimi e minimi)
     - Calcolo integrale

3. Equazioni differenziali ordinarie (EDO)
   - EDO di primo ordine a variabili separabili
   - EDO di primo ordine lineari
   - EDO di secondo ordine lineari a coefficienti costanti

4. Successioni e serie

5. Funzioni di più variabili (cenni)

Libro consigliato:
BERTSCH, DALL'AGLIO, GIACOMELLI - Epsilon 1, primo corso di analisi matematica

Nota: Gli appunti delle lezioni saranno disponibili sulla pagina web del corso e sul canale teams

Insiemi e logica

Def: Un INSIEME è una qualsiasi collezione di oggetti (detti ELEMENTI dell'insieme).

ESEMPI

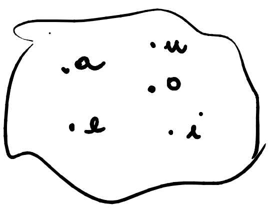
- $A = \{1, 11, 2, 33\}$ (RAPPRESENTAZIONE PER ELENCAZIONE)

- $B = \{a \quad e \quad i \quad o \quad u\}$
  $= \{x \mid x$ è una vocale dell'alfabeto italiano$\}$

simbolo che indica un generico elemento

tale che

Possiamo anche dare una rappresentazione grafica:



Insieme dei numeri naturali
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\ldots\}$

- $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ è pari$\}$
  $= \{0, 2, 4, 6, 8, 10 \ldots\ldots\}$
  $= \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Simboli utili

- $\in$ (appartiene)
  Si usa per dire che un elemento appartiene a un insieme
  Ad esempio:
  - $n \in \mathbb{N}$ significa che n è un numero naturale
  - $14 \in \mathbb{N}$
  - $a \in \{a, e, i, o, u\}$

- $\notin$ (non appartiene) $\quad l \notin \{a, e, i, o, u\}$
- $\emptyset$ (insieme vuoto)

- $\subseteq$ (inclusione tra insiemi)

  $A \subseteq B$ si legge: A è contenuto in B
  A è incluso in B

  Vuol dire: ogni elemento di A appartien anche a B.

- $\subsetneq$ (su alcuni libri si usa $\subset$)

  Simbolo di inclusione propria (o stretta)

  $A \subsetneq B$ significa: $A \subseteq B$ e $A \neq B$.

  cioè ogni elemento di A appartiene anch a B ed esiste un elemento di B che non appartiene ad A.

  Ad esempio:

  Se $C = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$, allora $C \subseteq \mathbb{N}$. Inoltre $C \subsetneq \mathbb{N}$

- $\not\subseteq$

  $A \not\subseteq B$ si legge: A non è contenuto in B

  Vuol dire: Esiste un elemento di A che non appartiene a B.

Simboli quantificatori

$\forall$ (ogni / per ogni).

$\exists$ (esiste)

$\nexists$ (non esiste)

$\exists!$ (esiste ed è unico)

Simboli logici

- $\Rightarrow$ implica (o $\Leftarrow$)

  Si usa tra due affermazioni per dire che se è vera la prima è vera anche la seconda.

- $\not\Rightarrow$ non implica
- $\Leftrightarrow$ se e solo se (si usa per dire che due affermazioni sono equivalenti)
- $\wedge$ e
- $\vee$ o (oppure)
- $\neg$ (negazione). Si usa per indicare la negazione di una affermazione.

ESEMPI

- Sia $x \in \mathbb{N}$ allora:

  Se x non è pari, allora x è dispari.

  Si scrive in maniera equivalente come:

  Sia $x \in \mathbb{N}$, allora:

  x non è pari $\Rightarrow$ x è dispari

  Oppure:

  $\neg$ (x è pari) $\Rightarrow$ x è dispari.

- Sia $x \in \mathbb{N}$:

  x è pari $\vee$ x è dispari

- Ogni numero naturale multiplo di 4 è pari.

  Si scrive:

$\forall n \in \mathbb{N}$: n multiplo di 4 $\Rightarrow$ n è pari.

- $\neg(\forall n \in \mathbb{N}:$ x è pari $\vee$ x è multiplo di 3$)$

Si scrive in maniera equivalente come:

$\exists n \in \mathbb{N}$: x non è pari $\wedge$ x non è multiplo di 3.

- Siano $a, b \in \mathbb{N}$:

  a è pari $\wedge$ b è pari $\Rightarrow$ $a+b$ è pari.

  a è pari $\vee$ b è pari $\not\Rightarrow$ $a+b$ è pari.

  a è pari $\vee$ b pari $\Rightarrow$ $a \cdot b$ è pari

Def: Siano A e B due insiemi, si dice che A È UN SOTTOINSIEME DI B se $A \subseteq B$.

$(\forall x \in A : x \in B)$

$(x \in A \Rightarrow x \in B)$

OSS Siano A e B due insiemi, allora:

$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.

$A \neq B \Leftrightarrow A \not\subseteq B \vee B \not\subseteq A$.

Operazioni elementari tra insiemi

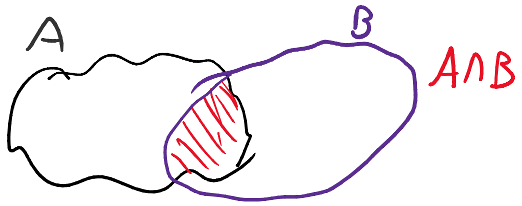
Siano A e B due insiemi, definiamo:

- UNIONE tra A e B l'insieme:

  $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

- **INTERSEZIONE** tra A e B:

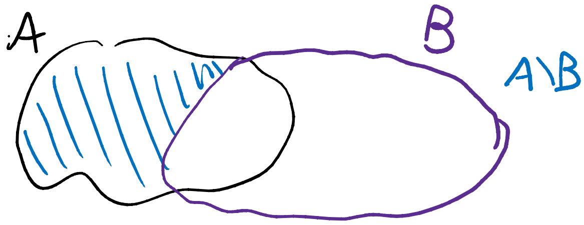
$$A \cap B := \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$$



- **DIFFERENZA** tra A e B:

$$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$$

si legge: A meno B



ESEMPIO

$A = \{ 1, \ 14, \ 18 \}$

$B = \{ 10, \ 20, \ -25, \ 14, \ 18, \ a \}$

$A \cup B = \{ 1, \ 14, \ 18, \ 10, \ 20, \ -25, \ a \}$

$A \cap B = \{ 14, \ 18 \}$.

$A \setminus B = \{ 1 \}$

$B \setminus A = \{ 10, \ 20, \ -24, \ a \}$

OSSERVAZIONE:

In generale: se A e B sono due insiemi finiti.

n. di elementi di $A \cup B$ =

n elementi di A + n di elementi di B − n. di elementi di $A \cap B$.

Def: Sia X un insieme e sia A un sottoinsieme di X. Si definisce **COMPLEMENTARE DI A IN X** l'insieme

$$\mathcal{C}_X(A) = X \setminus A = \{ x \in X \mid x \notin A \}.$$

Nel caso in cui $X = \mathbb{R}$ molto spesso $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(A)$ si indica anche A^c oppure con $\mathcal{C}(A)$.

ESEMPIO

$X = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è pari} \}$

$A = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è multiplo di } 4 \}$

$\quad = \{ 0, 4, 8, 12, 16 \ldots\ldots \}$

$C_X(A) = \{ 2, 6, 10, 14 \ldots\ldots \}$

$\quad = \{ 4m+2 \mid m \in \mathbb{N} \}.$

Nota: $C_X(A)$ dipende sia da A che da X. Se cambiamo A, cambiamo anche X.

In generale, se cambiamo X modifichiamo $C_X(A)$.

ESEMPIO

$X = \mathbb{N}$

$A = \{ 4n \mid n \in \mathbb{N} \}$

$C_X(A) = \{ 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, \ldots\ldots \}$

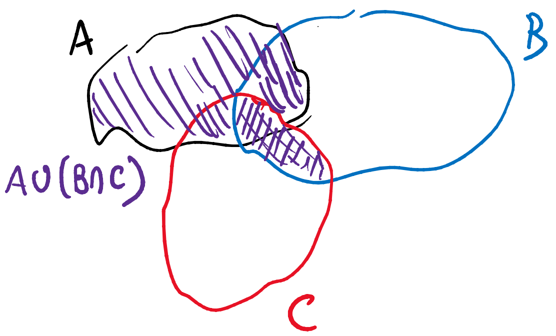
PROPRIETÀ Siano A, B, C tre insiemi:

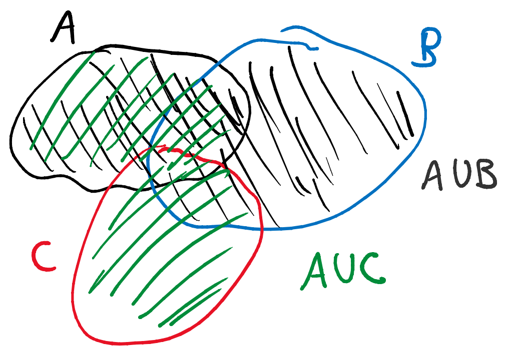
1) $A \cup B = B \cup A$

2) $A \cap B = B \cap A$

(Attenzione: $A \setminus B \neq B \setminus A$)

3) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$





4) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

5) Se $A, B \subseteq C$, allora

$$C_c(A \cup B) = C_c(A) \cap C_c(B)$$

e $$C_c(A \cap B) = C_c(A) \cup C_c(B)$$

Def: siano A e B due insiemi, definiamo **PRODOTTO CARTESIANO** tra A e B come l'insieme

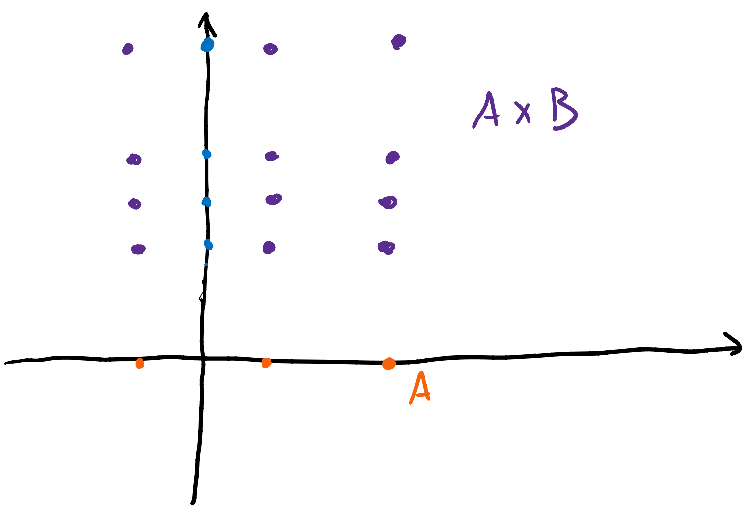
$$A \times B := \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$

ESEMPIO

$A = \{1, -1, 2\}$

$B = \{3, 4, 5, 111\}$

$A \times B = \{(1,3), (1,4), (1,5), (1,111), (-1,3), (-1,4), (-1,5), (-1,111), (2,3), (2,4), (2,5), (2,111)\}$



Insiemi numerici

- Numeri naturali

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots\ldots\ldots\}$

In $\mathbb{N}$ si possono fare somme e prodotti.
Non sempre si possono fare sottrazioni e quozienti.

- Numeri interi (relativi)

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4 \ldots\ldots\ldots\}$

Si possono fare addizioni, sottrazioni, prodotti ma non sempre si possono fare i quozienti.

3) Numeri razionali

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

NUMERATORE

DENOMINATORE

In $\mathbb{Q}$ si possono fare addizioni / sottrazioni / moltiplicazioni e quozienti (purché il denominatore non sia 0)

Ricordiamo

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$
- $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$
- $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
- $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

oppure se $m = m.c.m.(b, d)$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot \frac{m}{b} + c\,\frac{m}{d}}{m}$$

RICORDARE Dividere per una frazione significa moltiplicare per il suo reciproco:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

ATTENZIONE: Evitate espressioni del tipo $\frac{a}{\frac{b}{c}}$.

Si rischia di confondere:

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$$

con:

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$$

È sempre bene specificare qual è la frazione principale

ESEMPI:

- $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2 = 4$ mentre $\frac{\frac{2}{1}}{2} = \frac{2}{2} = 1$

- $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5-2}{10}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3} = \frac{5}{3}$

- $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{4}$

Attenzione 2

La rappresentazione di un numero razionale come frazione non è unica:

$$\frac{1}{4} = \frac{5}{20} = \frac{8}{32} = \frac{-2}{-8}$$

Nota, si ha un'unica rappresentazione se si assume $b > 0$ e $M.C.D(a, b) = 1$. In tal caso la frazione $\frac{a}{b}$ si dice ridotta ai minimi termini

Attenzione 3:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

ma

$$\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$$

Nelle frazioni si può spezzare una somma al numeratore ma non al denominatore

ESEMPIO

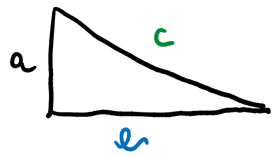
$$\frac{1}{2+3} = \frac{1}{5}$$

mentre $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

- Quali operazioni non si possono fare in $\mathbb{Q}$?
  Ad esempio le radici quadrate.

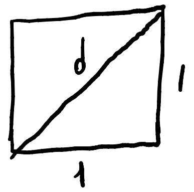
Storicamente il problema è nato con il

Teorema di Pitagora:



$$c^2 = a^2 + b^2$$

In particolare se d è la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1, allora



$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$
$$d^2 = 2$$

TEOREMA $\nexists\, q \in \mathbb{Q}$ tale che $q^2 = 2$.

DIM

Dimostrazione per assurdo. Supponiamo per assurdo che $\exists\, q \in \mathbb{Q}$ tale che $q^2 = 2$.

$q \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists\, a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ t.c. $q = \frac{a}{b}$.

Possiamo assumere che $a, b > 0$ non siano entrambi pari.

Allora $q^2 = 2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2$.

$\Rightarrow a^2$ è pari $\Rightarrow a$ è pari.

$\Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. $a = 2n$.

$a^2 = 2b^2 \Rightarrow (2n)^2 = 2b^2 \Leftrightarrow \cancel{4}_2 n^2 = \cancel{2} b^2$

$2n^2 = b^2 \Rightarrow b^2$ è pari $\Rightarrow b$ è pari.

Quindi a e b sono entrambi pari e questo contraddice la scelta di a e b. $\square$

C'è un altro indizio del fatto che i numeri razionali non siano "tutti i numeri".

Ogni numero razionale si può rappresentare in **FORMA DECIMALE** (come un numero con la virgola)

- $\frac{1}{2} = 0,5$
- $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$
- $\frac{113}{50} = 2,26$

Infatti:

$$
\begin{array}{r|l}
113 & 50 \\
\cline{2-2}
100 & \boxed{2,26} \\
\hline
130 & \\
100 & \\
\hline
300 & \\
300 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

- $\frac{1}{3}$

$$
\begin{array}{r|l}
1 & 3 \\
\cline{2-2}
0 & 0,33\ldots\ldots \\
\hline
10 & \\
9 & \\
\hline
10 & \\
9 & \\
\hline
1 &
\end{array}
$$

Ad ogni passo otteniamo resto 1
Quindi ci sono infiniti 3 dopo la virgola

- $\frac{2}{15}$

$$
\begin{array}{r|l}
2 & 15 \\
\cline{2-2}
0 & 0,13\ldots \\
\hline
20 & \\
15 & \\
\hline
50 & \\
45 & \\
\hline
5 &
\end{array}
$$

$$\frac{2}{15} = 0,133333\ldots = 0,1\overline{3}$$

• $2,1\overline{74} \Rightarrow 2,1\,74\,74\,74\,74\,\ldots$

Fatto: Si può dimostrare che la rappresentazione decimale di un numero razionale è finita o periodica.

Il numero:

$2,1\,2\,11\,22\,111\,222\,1111\,2222\,\ldots$

non è razionale.

Altri esempi di numeri irrazionali sono

π ed e

Numeri reali

$$\mathbb{R} = \{ n,a_1a_2a_3a_4\ldots \mid n \in \mathbb{Z},\ a_1,a_2,a_3\ldots \in \{0,1,2,\ldots,9\}\}$$

OSS

$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.

esistono numeri reali che razionali.