

Funzioni di più variabili reali

Siano m, n numeri naturali ≥ 1

Consideriamo una funzione $f: X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$

a) Se $m=1$ $f: X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ è una FUNZIONE REALE di m -VARIABILI REALI
(FUNZIONE SCALARE di m -variabili reali)

NB: Per $m=n=1$ ritraiamo le funzioni reali di variabili reali che abbiamo studiato durante il corso

b) Se $m \geq 2$ $f: X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una FUNZIONE VETTORIALE (di m -variabili reali)

c) Se $m=n \geq 2$ $f: X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ è un CAMPO VETTORIALE

Sia $m \geq 1$ numero naturale

$$\mathbb{R}^m = \{ (x_1, \dots, x_m) : x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R} \}$$

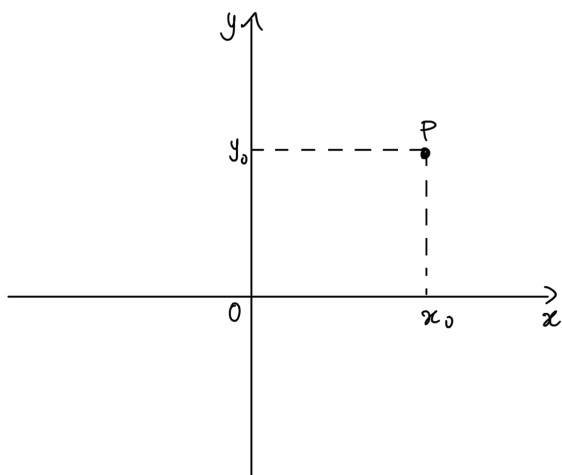
SPAZIO EUCLIDEO m -DIMENSIONALE

$$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R} \quad \text{RETTA EUCLIDEA}$$

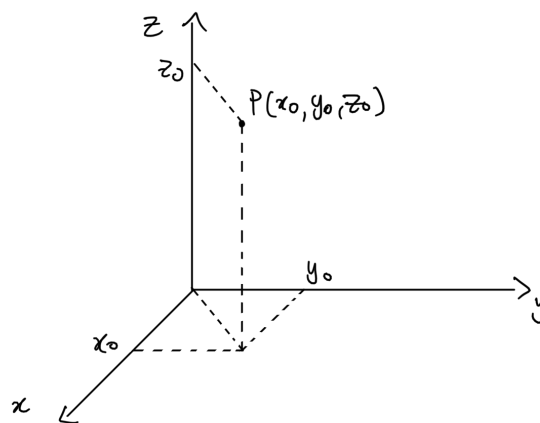
$$\mathbb{R}^2 = \{ (x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \} \quad \text{PIANO EUCLIDEO}$$

$$\mathbb{R}^3 = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \} \quad \text{SPAZIO EUCLIDEO TRIDIMENSIONALE}$$

(spazio fisico)



Nel piano euclideo ogni punto è individuato univocamente da due coordinate cartesiane
(invece di (x_1, x_2) spesso si usano (x, y))



Nello spazio tridimensionale ogni punto è individuato univocamente da tre coordinate cartesiane
(qui usiamo (x, y, z) al posto di (x_1, x_2, x_3))

NOTAZIONI

1) Scriviamo $x \in \mathbb{R}^m$ per dire che x è una m -pla di numeri reali, ovvero

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \quad \text{con } x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}$$

Sui libri di Analisi Matematica 2, si possono trovare anche le seguenti notazioni:

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_m) \quad \text{oppure} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \text{cioè il "vettore" } \vec{x} \text{ si scrive in colonne}$$

2) se $f: X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ possiamo scrivere

$$\text{sia } x \in X \subset \mathbb{R}^m \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$$

$$\text{oppure } (x_1, \dots, x_m) \in X \subset \mathbb{R}^m \mapsto f(x_1, \dots, x_m) \text{ per enfatizzare la dipendenza di } f \text{ da } m \text{ variabili}$$

3) se $f: X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $m \geq 2$ (funzione vettoriale) possiamo usare differenti notazioni:

- $x \in X \subset \mathbb{R}^m \mapsto f(x) \in \mathbb{R}^m$
- $x \in X \subset \mathbb{R}^m \mapsto (f_1(x), \dots, f_m(x)) \in \mathbb{R}^m$

$f_1, \dots, f_m: X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ si chiamano COMPONENTI della funzione vettoriale f

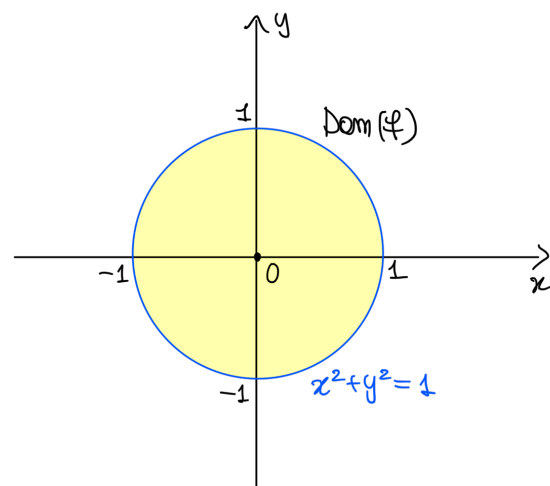
- $(x_1, \dots, x_m) \in X \subset \mathbb{R}^m \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_m(x_1, \dots, x_m)) \in \mathbb{R}^m$

Esempi

$$1) \quad f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$f: X \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funzione reale di due variabili reali

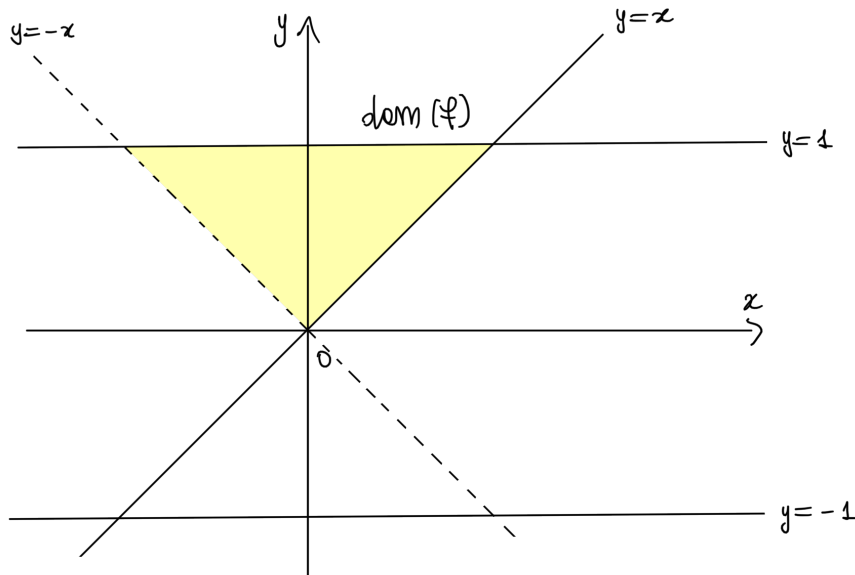
$$\begin{aligned} X = \text{dom}(f) &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \} \\ &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \} \end{aligned}$$



2) $f(x,y) = (\ln(x+y), \sqrt{y-x}, \arcsin y + e^x)$ funzione vettoriale
(di due variabili reali)

$$f: X \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} X = \text{dom}(f) &= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y > 0, y-x \geq 0, y \in [-1,1] \} \\ &= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x, y \geq x, -1 \leq y \leq 1 \} \end{aligned}$$



$$f_1(x,y) = \ln(x+y)$$

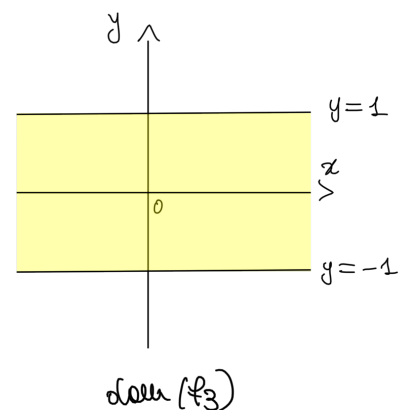
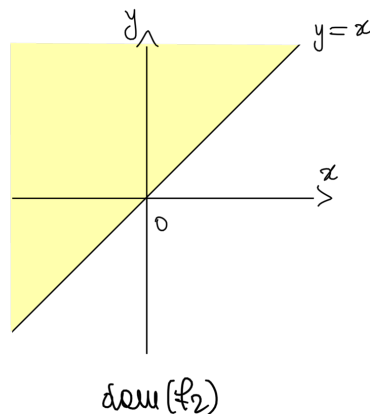
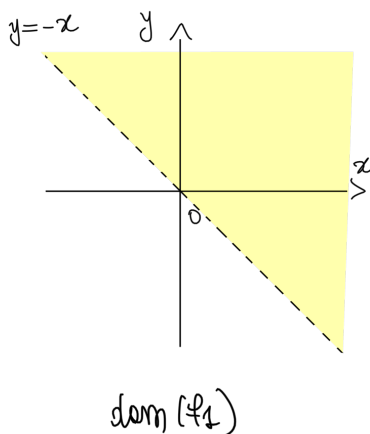
$$f_2(x,y) = \sqrt{y-x}$$

$$f_3(x,y) = \arcsin y + e^x$$

f_1, f_2, f_3 sono le tre funzioni componenti della funzione f

(in particolare, f_1, f_2, f_3 sono funzioni SCALARI di due variabili reali)

Osserviamo che il dominio di f è dato dall'intersezione dei domini di f_1, f_2 e f_3



Definizione Sia $f: X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ funzione scalare di m -variabili reali

Il GRAFICO di f è l'insieme

$$\begin{aligned} G(f) &:= \{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^{m+1} : x \in X \} \\ &= \{ (x_1, \dots, x_m, f(x_1, \dots, x_m)) \in \mathbb{R}^{m+1} : (x_1, \dots, x_m) \in X \} \end{aligned}$$

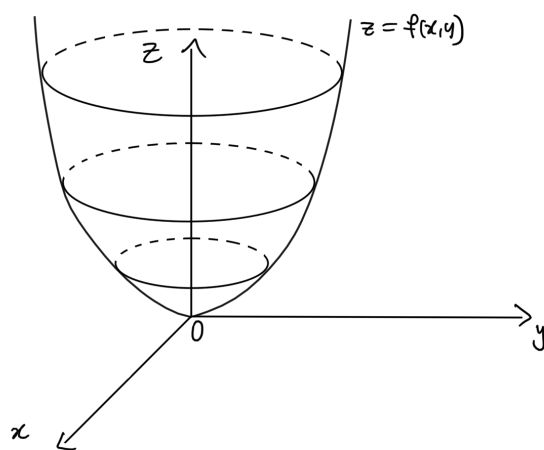
- Se $m=1$ $G(f)$ è una "curva" in $\mathbb{R}^2$
- Se $m=2$ $G(f)$ è una "superficie" in $\mathbb{R}^3$

Esempio $f(x,y) = x^2 + y^2$ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Il grafico di f è l'insieme dei punti

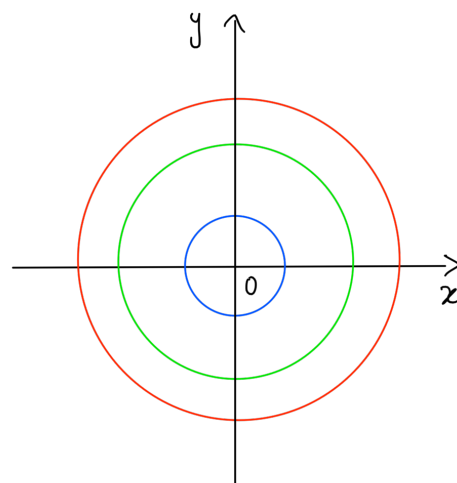
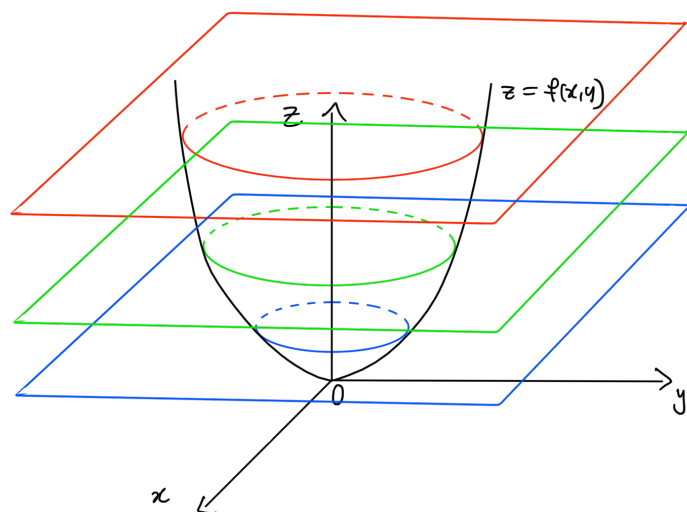
$$G(f) = \{ (x,y, x^2+y^2) : x,y \in \mathbb{R} \}$$

In geometria questa superficie è una quadrica e si chiama PARABOLOIDE CIRCOLARE



Le funzioni reali di due variabili reali si possono rappresentare anche mediante le curve di livello, ovvero curve nel piano xy su cui la funzione considerata è costante. Tali curve si ottengono proiettando sul piano xy la intersezione dei piani paralleli al piano xy (cioè i piani del tipo $\{ (x,y, c) : x,y \in \mathbb{R} \}$ con c costante reale) con il grafico di f .

Nell'esempio precedente le curve di livello sono le circonferenze centrate nell'origine



Da qui in seguito considereremo principalmente funzioni scalari di più variabili reali (cioè per $m=1$), pertanto ometteremo gli aggettivi scalare / vettoriale sottintendendo che $f : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ sia sempre scalare qualora non sia diversamente specificato.

Diversamente da quanto abbiamo visto nel caso di funzioni reali di una singola variabile reale, nel caso di funzioni reali di più variabili reali:

non vogliamo disegnare i grafici di queste funzioni. Già nel caso precedente abbiamo visto che non è semplice, nonostante la funzione considerata fosse molto semplice, disegnare la superficie individuata dal grafico nello spazio tridimensionale per una funzione di due variabili reali.

Anche per $m \geq 3$ non possiamo disegnare il grafico in uno spazio $m+1$ dimensionale visto che $m+1 \geq 4$. Per $m=3$ potremmo molto difficilmente disegnare le SUPERFICI di LIVELLO nello spazio tridimensionale se considerassimo una funzione reale di tre variabili reali molto semplice.

Cosa è interessante studiare per le funzioni reali di più variabili reali?

Molti concetti che abbiamo introdotto per le funzioni di una singola variabile reale possono estendersi in maniera 'naturale' a funzioni di più variabili reali (ad esempio le nozioni di continuità, limitatezza, punti di massimo e minimo relativi e/o assoluti, convessità) a patto di capire la GEOMETRIA dello spazio euclideo $\mathbb{R}^m$.

La nozione di derivabilità per funzioni di più variabili reali verrà invece rimpiazzata da una nozione più forte (derivabilità).

Nel caso $m=1$ DERIVABILITÀ e DIFFERENZIABILITÀ sono due concetti equivalenti, per $m \geq 2$ vedremo invece che

$$\nexists \text{ derivabile} \Rightarrow \nexists \text{ differenziabile}$$
$$\nLeftarrow$$

Utilizzando questa nozione di derivabilità potremo studiare i punti di massimo e minimo relativi per $f: X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$.

Prima di fare ciò dobbiamo tuttavia introdurre

- PROPRIETÀ ALGEBRICHE di $\mathbb{R}^m$ (operazioni: somma, prodotto per uno scalare)
- PROPRIETÀ METRICHE di $\mathbb{R}^m$ (prodotto scalare, norma, distanza, sottoinsiemi limitati)
- PROPRIETÀ TOPOLOGICHE di $\mathbb{R}^m$ e dei suoi sottoinsiemi (insiemi aperti, insiemi chiusi, bordo, interno, esterno, di confine, punti di accumulazione, insiemi compatti, insiemi convessi, insiemi connessi per poligoni)

OPERAZIONI IN $\mathbb{R}^m$

ADDIZIONE

$$x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$$

$$x+y := (x_1+y_1, \dots, x_m+y_m) \in \mathbb{R}^m$$

MOLTIPLICAZIONE PER UN NUMERO REALE

$$x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lambda x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_m) \in \mathbb{R}^m$$

$\mathbb{R}^m$ munito delle due operazioni precedenti è uno SPAZIO VETTORIALE REALE, ovvero verifica le seguenti proprietà

$$(G_1) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^m : x + (y + z) = (x + y) + z \quad (\text{l'addizione è associativa})$$

$$(G_2) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m : x + y = y + x \quad (\text{l'addizione è commutativa})$$

$$(G_3) \quad \exists 0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m \text{ tale che } \forall x \in \mathbb{R}^m : x + 0 = x \quad (\text{esistenza dello zero di } \mathbb{R}^m)$$

$$(G_4) \quad \forall x \in \mathbb{R}^m \quad \exists -x = (-1)x \in \mathbb{R}^m \text{ tale che } x + (-x) = 0 \quad (\text{esistenza dell'opposto})$$

$$(V_1) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m : \quad \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$$

$$(V_2) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m : \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$$

$$(V_3) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m : \quad \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$$

$$(V_4) \quad \exists 1 \in \mathbb{R} \text{ tale che } \forall x \in \mathbb{R}^m : \quad 1x = x$$

(distributivita' del prodotto per uno scalare reale rispetto ad entrambe le variabili)

Per questo motivo talvolta chiamiamo gli elementi di $\mathbb{R}^m$ VETTORI

Definizione Consideriamo i seguenti vettori di $\mathbb{R}^m$

$$e_1 := (1, 0, \dots, 0)$$

$$e_2 := (0, 1, \dots, 0)$$

$\vdots$

$$e_m := (0, 0, \dots, 1)$$

Quindi e_j è la m-pla aventi componenti tutte nulle tranne la j-esima che è 1

$\{e_1, \dots, e_m\}$ si chiama BASE CANONICA di $\mathbb{R}^m$

Osservazione Ogni vettore $x = (x_1, \dots, x_m)$ si scrive in maniera univoca come

$$x = \sum_{j=1}^m x_j e_j, \quad \text{questo fatto si esprime dicendo che è possibile scrivere}$$

x come COMBINAZIONE LINEARE dei vettori della base canonica mediante i coefficienti $x_1, \dots, x_m$.

Notazioni In $\mathbb{R}^3$ (spazio fisico tridimensionale) invece di e_1, e_2, e_3 i vettori della base canonica si denotano con

$$\vec{i} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{j} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{k} = (0, 0, 1)$$

PRODOTTO SCALARE

Se $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$

$$x \cdot y := \sum_{j=1}^m x_j y_j = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_m y_m \in \mathbb{R} \quad (\text{prodotto scalare tra } x \text{ e } y)$$

NB: 1) il prodotto scalare di due vettori di $\mathbb{R}^m$ è un numero reale!

2) il prodotto scalare $x \cdot y$ si denota anche con (x, y) oppure $\langle x, y \rangle$

Il prodotto scalare in $\mathbb{R}^m$ verifica le seguenti proprietà

$$(B_1) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^m : (x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

(il prodotto scalare è distributivo rispetto alla somma)

$$(B_2) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^m : x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$(B_3) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}^m : (\lambda x) \cdot y = \lambda (x \cdot y) = x \cdot (\lambda y)$$

(il prodotto scalare è omogeneo rispetto alla moltiplicazione per scalari reali)

$$(Q_1) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m : x \cdot y = y \cdot x$$

$$(Q_2) \quad \forall x \in \mathbb{R}^m : x \cdot x \geq 0$$

$$(Q_3) \quad \forall x \in \mathbb{R}^m : x \cdot x = 0 \iff x = (0, \dots, 0)$$

Le proprietà $(B_1) - (Q_3)$ ci dicono che • individua una FORMA QUADRATICA DEFINITA POSITIVA. Incontreremo nuovamente le forme quadratiche quando parleremo del "differenziale di ordine 2" di una funzione di più variabili reali

NORMA

Se $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$

$$\|x\| := \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{j=1}^m x_j^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2} \quad (\text{norma o modulo di } x)$$

$\|x\|$ rappresenta la lunghezza del vettore x
oppure la distanza tra il punto x di $\mathbb{R}^m$ e l'origine

La norma verifica le seguenti proprietà

$$(N_1) \quad \forall x \in \mathbb{R}^m : \|x\| \geq 0$$

$$(N_2) \quad \forall x \in \mathbb{R}^m : \|x\| = 0 \iff x = (0, \dots, 0)$$

$$(N_3) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^m : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

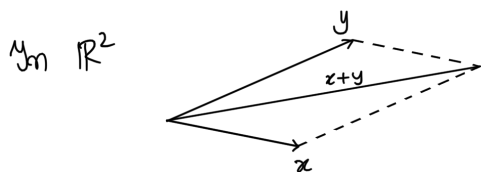
$$(N_4) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m : \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

(DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE)

$$(N_5) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m : |x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$$

(DISUGUAGLIANZA di CAUCHY-SCHWARZ)

L'uguaglianza nella disuguaglianza di Cauchy-Schwarz vale se e soltanto se x e y sono paralleli (se x, y sono entrambi diversi da $(0, \dots, 0)$ questo equivale a richiedere che esista $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ tale che $y = \lambda x$)



Definizioni

- $x, y \in \mathbb{R}^m$ si dicono ORTOGONALI se $x \cdot y = 0$
- $u \in \mathbb{R}^m$ si dice VERSORE se $\|u\| = 1$

Osservazione

I vettori della base canonica sono versori ($\|e_j\| = 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}$) e
 $\forall i, j \in \{1, \dots, m\} : i \neq j \Rightarrow e_i \cdot e_j = 0$.

Queste due proprietà si riassumono brevemente dicendo che $\{e_1, \dots, e_m\}$ è una base ORTONORMALE di $\mathbb{R}^m$

DISTANZA (o METRICA) in $\mathbb{R}^m$

Se $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$

$$d(x, y) := \|x - y\| = \left(\sum_{j=1}^m (x_j - y_j)^2 \right)^{1/2} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2}$$

si chiama DISTANZA tra i punti x e y

Esempi:

1) Per $m=1$ $d(x, y) = |x - y|$

2) Per $m=2$ $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

3) Per $m=3$ $d((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$

Definizione Siano $x_0 \in \mathbb{R}^m$ e $r > 0$, l'insieme

$$B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^m : \|x - x_0\| < r\}$$

si chiama **INTORNO SFERICO** di x_0 di raggio r

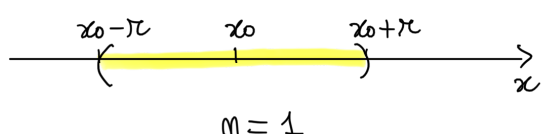
oppure **PALLA APERTA** di centro x_0 e raggio r

$B_r(x_0)$ è costituito dai punti di $\mathbb{R}^m$ che hanno distanza da x_0 minore di r

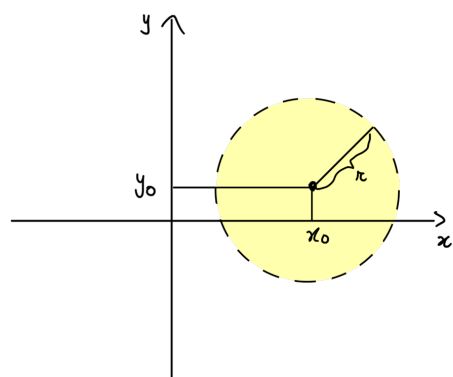
Esempi

1) Per $m=1$ $B_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$ intervallo aperto di estremi $x_0 \pm r$

(osserviamo che x_0 è il punto medio di tale intervallo e le distanze di x_0 dai due estremi $x_0 \pm r$ è esattamente r)

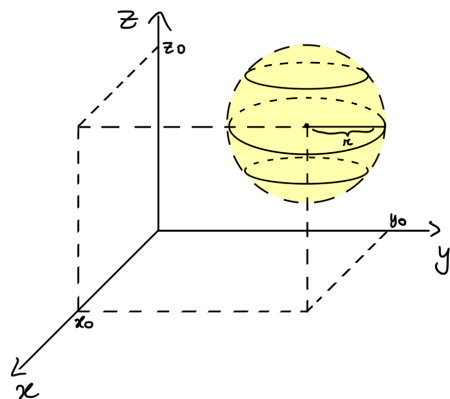


2) Per $m=2$ $B_\pi(x_0, y_0)$ è la regione di piano interna alla circonferenza di centro (x_0, y_0) e raggio $\pi > 0$



$m=2$

3) Per $m=3$ $B_\pi(x_0, y_0, z_0)$ è la regione di spazio interna alla sfera di centro (x_0, y_0, z_0) e raggio $\pi > 0$



$m=3$

PROPRIETÀ TOPOLOGICHE DEI SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{R}^m$

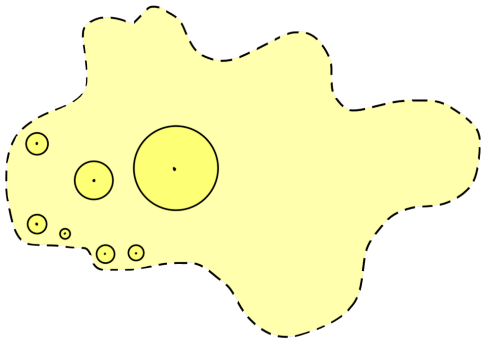
Definizione Sia $A \subset \mathbb{R}^m$. Diciamo che A è un **INSIEME APERTO** se

$\forall x \in A \quad \exists \pi = \pi(x) > 0$ tale che $B_\pi(x) \subset A$

(osserviamo esplicitamente che il raggio π dipende dal punto x)

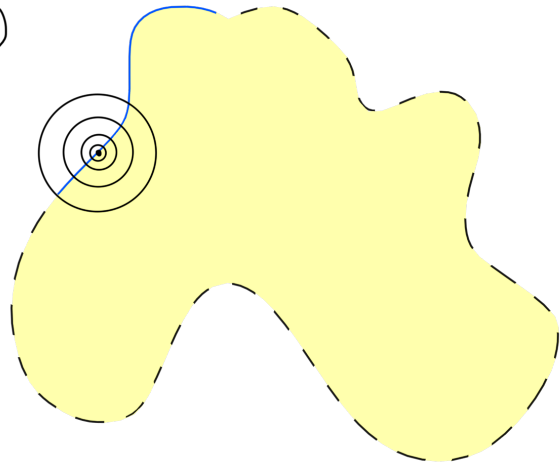
Esempi

1)



insieme aperto

2)



insieme non aperto

(i punti blu appartengono all'insieme e solo quelli che danno problemi, non importa quanto piccolo è ϵ la palla non sarà mai tutta contenuta nell'insieme)

3) $\forall x_0 \in \mathbb{R}^m, \forall \epsilon > 0 : B_\epsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x - x_0\| < \epsilon\}$ è aperto

Definizione Sia $C \subset \mathbb{R}^m$. Diciamo che C è un **INSIEME CHIUSO**

se $\mathbb{R}^m \setminus C = \{x \in \mathbb{R}^m : x \notin C\}$, cioè il complementare di C in $\mathbb{R}^m$

è un insieme aperto

Esempio: $\forall x_0 \in \mathbb{R}^m, \forall \epsilon > 0 : \overline{B_\epsilon(x_0)} = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x - x_0\| \leq \epsilon\}$ è chiuso
(questo insieme si chiama **ALLA CHIUSA** di centro x_0 e raggio ϵ)

Definizione Siano $x_0 \in \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ tale che $x_0 \in V$.

Diciamo che V è un **INTORNO** di x_0 se $\exists A$ insieme aperto tale che $x_0 \in A \subset V$

Definizioni Siano $X \subset \mathbb{R}^m$ e $x_0 \in \mathbb{R}^m$.

1) Diciamo che x_0 è un **PUNTO INTERNO** di X e scriviamo $x_0 \in \text{Int}(X)$

se x_0 è un intorno di x_0 , ovvero esiste $A \subset \mathbb{R}^m$ insieme aperto tale che $x_0 \in A \subset X$.

$\text{Int}(X)$ si chiama **INTERNO** di X .

2) Diciamo che x_0 è un **PUNTO ESTERNO** di X e scriviamo $x_0 \in \text{Ext}(X)$

se x_0 è un punto interno di $\mathbb{R}^m \setminus X$, ovvero esiste $A \subset \mathbb{R}^m$ insieme aperto tale che $x_0 \in A$ e $A \cap X = \emptyset$. $\text{Ext}(X)$ si chiama **ESTERNO** di X

- 3) Diciamo che x_0 è un **PUNTO di ACCUMULAZIONE** di X e scriviamo $x_0 \in D(X)$ se $\forall V \subset \mathbb{R}^m$ intorno di x_0 : $V \cap (X \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$, ovvero se $\forall V \subset \mathbb{R}^m$ intorno di x_0 : V contiene punti di X diversi da x_0 .

$D(X)$ si chiama DERIVATO di X .

- 4) Diciamo che x_0 è un **PUNTO ISOLATO** di X se x_0 non è un punto di accumulazione di X , ovvero se $\exists V \subset \mathbb{R}^m$ intorno di x_0 tale che $V \cap X = \{x_0\}$
- 5) L'insieme $X \cup D(X)$ si chiama **CHiusura** di X e lo denotiamo $\overline{X}$
- 6) L'insieme $\overline{X} \cap (\overline{\mathbb{R}^m \setminus X})$ si chiama **FRONTIERA** (o **BORDO**) di X e si denota ∂X

Proposizione : Sia $X \subset \mathbb{R}^m$.

- $\text{Int}(X) \subset X$
- $\text{Int}(X)$ è uguale all'unione di tutti gli insiemi aperti contenuti in X
- $\text{Int}(X)$ è il più grande insieme aperto (per inclusione) contenuto in X
- X è un insieme aperto $\Leftrightarrow \text{Int}(X) = X$
- X è un insieme aperto $\Leftrightarrow X \cap \partial X = \emptyset$
- $\text{Ext}(X) = \text{Int}(\mathbb{R}^m \setminus X)$

Proposizione : Sia $X \subset \mathbb{R}^m$.

- $\partial X = \mathbb{R}^m \setminus (\text{Int}(X) \cup \text{Ext}(X))$, ovvero x_0 è un punto del bordo di X se $\forall V$ intorno di x_0 : V contiene punti sia di X che di $\mathbb{R}^m \setminus X$
- $\overline{X} = X \cup \partial X$, benevolmente $X \subset \overline{X}$
- $\overline{X}$ è uguale all'intersezione di tutti gli insiemi chiusi contenenti X
- $\overline{X}$ è il più piccolo insieme chiuso (per inclusione) contenente X
- X è un insieme chiuso $\Leftrightarrow X = \overline{X}$
- X è un insieme chiuso $\Leftrightarrow \partial X \subset X$

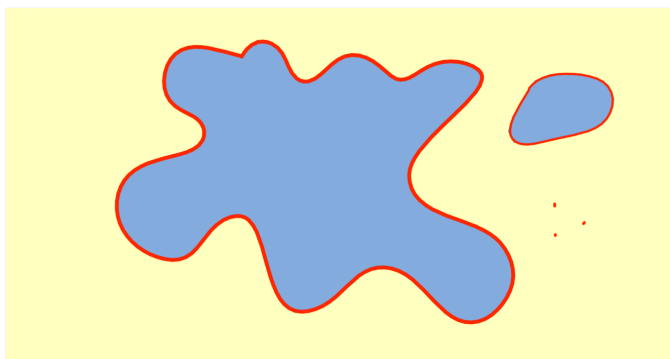
Osservazioni

- 1) Esistono sottoinsiemi di $\mathbb{R}^m$ che non sono né aperti né chiusi.
 Se $X \subset \mathbb{R}^m$ non è né aperto né chiuso valgono le seguenti inclusioni strette
 $\text{Int}(X) \subsetneq X \subsetneq \overline{X}$, ovvero in termini del bordo
 $\partial X \cap X \neq \emptyset$ e $\partial X \cap (\mathbb{R}^m \setminus X) \neq \emptyset$ cioè ∂X è contenuto
 in parte in X e in parte nel complementare di X

- 2) Gli unici sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ ad essere simultaneamente aperti e chiusi sono $\mathbb{R}^n$ e $\emptyset$

Esempi

1)



$\text{Int}(X)$ è la parte azzurra

$\text{Ext}(X)$ è la parte gialla

∂X è la parte rossa

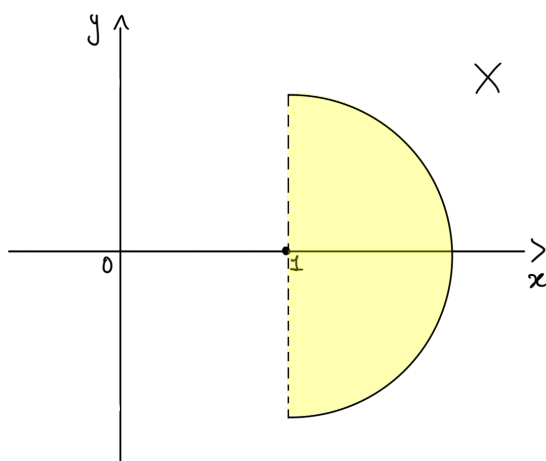
I tre puntini in rosso sono punti isolati

$D(X)$ è $\text{Int}(X) \cup \partial X$ privato dei tre puntini rossi

$\bar{X}$ è l'unione della parte azzurra e di quella rossa

$$\begin{aligned}
 2) \quad X &= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1, \quad x > 1 \} \\
 &= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \} \cap \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1 \}
 \end{aligned}$$

palla piena di centro $(1,0)$
e raggio 1
semipiano aperto



$$\text{Int}(X) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 < 1 \wedge x > 1 \}$$

$$\text{Ext}(X) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 > 1 \vee x < 1 \}$$

$$\begin{aligned}
 \partial X &= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^n : [(x-1)^2 + y^2 = 1 \wedge x \geq 1] \vee [x = 1 \wedge -1 \leq y \leq 1] \} \\
 &\quad \text{semicirconferenza} \qquad \text{segmento congiungente} \\
 &\quad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad (1,1) \text{ e } (1,-1)
 \end{aligned}$$

$$\bar{X} = D(X) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \wedge x \geq 1 \}$$

↑
non ci sono punti isolati

LIMITI E CONTINUITA'

Definizione Siano $f: X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D(X)$ (cioè x_0 è punto di accumulazione) e $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Diciamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ se

$\forall V$ intorno di $l \exists U$ intorno di x_0 tale che $\forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\} : f(x) \in V$, ovvero se
 $\forall V$ intorno di $l \exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in X \setminus \{x_0\} : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow f(x) \in V$

Osservazione La definizione precedente è formalmente identica a quella che abbiamo visto per le funzioni reali di una singola variabile reale, ciò che è stato necessario definire in $\mathbb{R}^m$ è stata un'opportuna definizione di intorno di un punto (abbiamo usato gli insiemi aperti che a loro volta erano stati definiti tramite le palle aperte rispetto alla metrica euclidea)

Possiamo riscrivere la definizione precedente considerando separatamente i tre casi $l \in \mathbb{R}$, $l = +\infty$ e $l = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in X \setminus \{x_0\} : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in X \setminus \{x_0\} : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in X \setminus \{x_0\} : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$$

Analogamente a quanto visto nel caso scalare, introduciamo la definizione di continuità

Definizione Siano $f: X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$.

Diciamo che f è CONTINUA in x_0 se

1) $x_0 \notin D(X)$ (cioè se x_0 è un punto isolato)

oppure

2) $x_0 \in D(X)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, ovvero

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in X : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Osservazioni

Tutti i teoremi sulle operazioni tra limiti e tra funzioni continue che abbiamo visto nel caso di funzioni reali di una singola variabile reale continuano ad essere validi per funzioni reali di più variabili reali. Inoltre continuano a valere anche i teoremi di permanenza del segno, di prolungamento delle disuguaglianze, della convergenza obbligata e del confronto (e fatto di modificare la nozione di definitivamente per $x \rightarrow x_0$ usando gli intorni sferici centrati in x_0)

Per funzioni vettoriali $f: X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ possiamo definire analogamente il concetto di limiti:

Definizione Diamo $f: X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione vettoriale di m -variabili reali, $x_0 \in D(X)$ (cioè x_0 è punto di accumulazione per X) e $l \in \mathbb{R}^m$.

Diciamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ se

$\forall V \subset \mathbb{R}^m$ intorno di $l \quad \exists U \subset \mathbb{R}^m$ intorno di x_0 tale che $\forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\} : f(x) \in V$

ovvero (considerando gli intorni sferici $B_\varepsilon(l) \subset \mathbb{R}^m$ e $B_\delta(x_0) \subset \mathbb{R}^m$) se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in X \setminus \{x_0\} : \underset{\substack{\uparrow \\ \text{norma in } \mathbb{R}^m}}{\|x - x_0\| < \delta} \Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{norma in } \mathbb{R}^m}}{\|f(x) - l\| < \varepsilon}$

Proposizione Diamo $f: X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x_0 \in D(X)$ e $l = (l_1, \dots, l_m) \in \mathbb{R}^m$.

Supponiamo che $f = (f_1, \dots, f_m)$, cioè $f_1, \dots, f_m: X \rightarrow \mathbb{R}$ sono le componenti di f .

Sono equivalenti le seguenti proposizioni:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$
- $\forall j \in \{1, \dots, m\} : \lim_{x \rightarrow x_0} f_j(x) = l_j$

Corollario Se $f = (f_1, \dots, f_m): X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $x_0 \in X$. Allora

f è continua in $x_0 \iff \forall j \in \{1, \dots, m\} : f_j$ è continua in x_0

Conclusione: Per studiare i limiti e/o la continuità delle funzioni vettoriali è sufficiente studiare i limiti e/o la continuità delle funzioni componenti (che sono funzioni scalari)

Osservazione Siano $f: X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{Int}(X)$ e $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Consideriamo $v \in \mathbb{R}^m$, $v \neq (0, \dots, 0)$

L'insieme $\{x_0 + tv : t \in \mathbb{R}\}$ è la retta in $\mathbb{R}^m$ per x_0 parallela a v

L'insieme $\{x_0 + tv : t \in [a, b]\}$ è un segmento sulla retta precedente

Perché $x_0 \in \text{Int}(X)$, esiste $\eta > 0$ tale che $\{x_0 + tv : t \in [-\eta, \eta]\} \subset X$

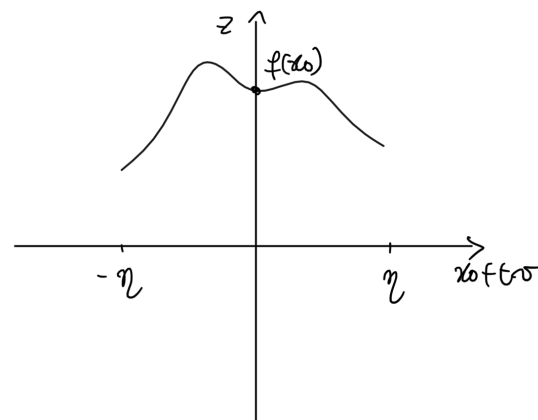
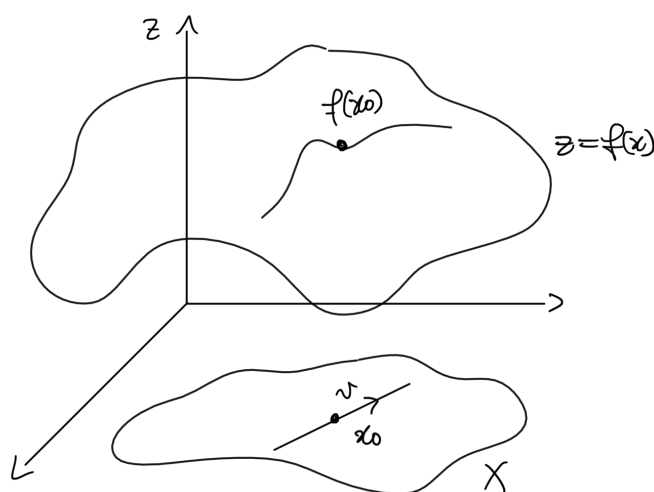
Possiamo dunque considerare la composizione

$$t \in [-\eta, \eta] \longmapsto x_0 + tv \in X \subset \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} f(x_0 + tv)$$

Denotiamo questa funzione $\varphi_{x_0, v}$.

$\varphi_{x_0, v}$ descrive il comportamento di f su un segmento centrato in x_0 parallelo a v

$\varphi_{x_0, v}$ è una funzione reale di variabile reale



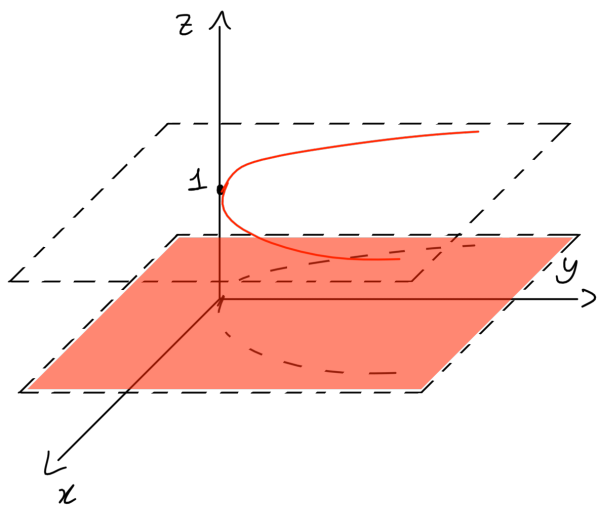
Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ allora $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_{x_0, v}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + tv) = l \quad \forall v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0, 0\}$

ATTENZIONE non vale il viceversa!

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_{x_0, v}(t) = l \quad \forall v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0, 0\} \not\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Abbiamo il seguente controesempio

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = x^2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Riportiamo adesso il teorema di Weierstrass e il teorema dei valori intermedi nel caso di funzioni di più variabili.

Ricordiamo che nel caso unidimensionale sono fondamentali le ipotesi sul dominio della funzione, più precisamente

Ipotesi teorema di Weierstrass: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua

Ipotesi dei valori intermedi: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $I \subset \mathbb{R}$ intervallo

Prima di enunciare questi due teoremi nella versione multidimensionale dobbiamo dunque introdurre due tipologie di insiemi di $\mathbb{R}^m$ che generalizzino gli intervalli chiusi e limitati e gli intervalli, rispettivamente

Definizione $X \subset \mathbb{R}^m$ si dice **LIMITATO** se è contenuto in una palla centrata nell'origine, ovvero se $\exists M > 0$ tale che $\forall x \in X: \|x\| < M$

Definizione $X \subset \mathbb{R}^m$ si dice **COMPATTO** se è chiuso e limitato

Esempi 1) $\overline{B_r(x_0)} = \{x \in \mathbb{R}^m: \|x - x_0\| \leq r\}$ è compatto

2) $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^m: \|x - x_0\| < r\}$ è limitato ma non è chiuso

3) $\mathbb{R}^m - B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^m: \|x - x_0\| \geq r\}$ è chiuso ma non è limitato

Teorema di Weierstrass Siano $X \subset \mathbb{R}^n$ compatto e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Allora f è dotata di massimo e di minimo su X , ovvero

$$\exists x_1, x_2 \in X \text{ tali che } \forall x \in X : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

Definizioni Usando le stesse notazioni del Teorema Weierstrass, diciamo che

$f(x_1) = \min_{x \in X} f(x) = \min \{f(x) : x \in X\}$ è il **MINIMO ASSOLUTO** di f in X

$f(x_2) = \max_{x \in X} f(x) = \max \{f(x) : x \in X\}$ è il **MASSIMO ASSOLUTO** di f in X

x_1 è **PUNTO di MINIMO ASSOLUTO** di f in X

x_2 è **PUNTO di MASSIMO ASSOLUTO** di f in X

Osservazioni

- $\{f(x) : x \in X\} \subset \mathbb{R}$ e sappiamo cosa significano massimo e minimo per sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.
- Il risultato precedente vale anche se $n=1$, pertanto possiamo rilassare le ipotesi del teorema di Weierstrass "classico" considerando funzioni definite anche su sottoinsiemi chiusi e limitati di $\mathbb{R}$ (e non solo intervalli chiusi e limitati)

Definizioni

- Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$. L'insieme

$$[[x, y]] := \{x + t(y-x) : t \in [0, 1]\}$$

si chiama **SEGMENTO** di estremi $x, y \in \mathbb{R}^n$

- Siano $x_0, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ tali che $\forall j \in \{1, \dots, k\} : x_{j-1} \neq x_j$. L'insieme

$$\bigcup_{j=1}^k [[x_{j-1}, x_j]]$$

si chiama **POLIGONALE** di vertici $x_0, x_1, \dots, x_k$.

I punti x_0 e x_k si dicono **ESTREMI** della poligonale

- Diciamo che $X \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme **CONNESSO PER POLIGONALI** se

$\forall x, y \in X \exists$ una poligonale di estremi x e y completamente contenuta in X

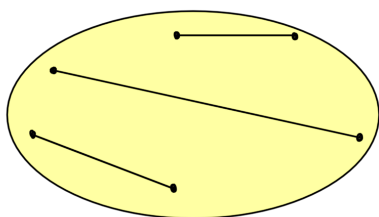
- Diciamo che $X \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme **CONVESSO** se

$$\forall x, y \in X : [[x, y]] \subset X$$

Osservazione Poiché i segmenti sono casi particolari di poligoni,
vale la seguente implicazione: X connesso $\Rightarrow X$ connesso per poligoni

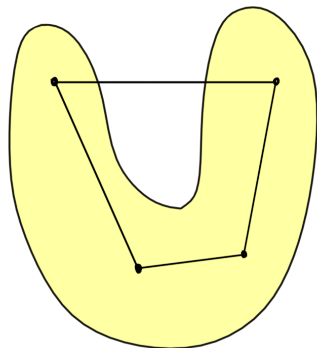
Esempi

1)



insieme connesso

2)



insieme connesso per poligoni
ma non connesso

Teorema dei valori intermedi

Siano $X \subset \mathbb{R}^n$ aperto connesso per poligoni non vuoto e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Allora f assume tutti i valori compresi tra l'estremo inferiore e l'estremo

superiore di f su X , ovvero posto $m := \inf \{f(x) : x \in X\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

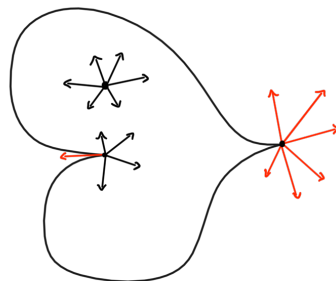
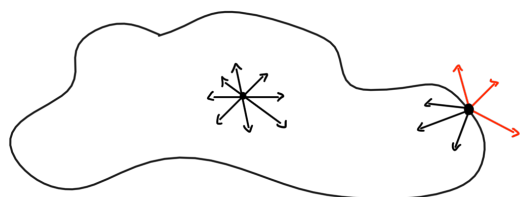
$M := \sup \{f(x) : x \in X\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

si ha che $\forall y \in (m, M) \exists x \in X$ tale che $f(x) = y$

DERIVATE PARZIALI

Introduciamo adesso il concetto di derivate direzionale per una funzione di più variabili.

Considereremo solamente punti interni, in modo che esista un segmento contenente x_0 tutto contenuto nel dominio



Sono colorati in rosso le direzioni v in cui il segmento $[x_0, x_0 + tv]$ per ogni $t > 0$ non ha altri punti in X ad eccezione di x_0 .

Definizione Siano $f: X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{Int}(X)$ e $v \in \mathbb{R}^m$, $v \neq (0, \dots, 0)$.

Se la funzione reale di variabili reali $\varphi_{x_0, v}(t) = f(x_0 + tv)$ è derivabile in $t=0$, ovvero $\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_{x_0, v}(h) - \varphi_{x_0, v}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h}$

allora diciamo che f ammette **DERIVATA DIREZIONALE** in x_0 nella direzione v e denotiamo

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h}$$

Altre notazioni per la derivata direzionale in x_0 nella direzione v della f

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0), \quad \frac{\partial}{\partial v} f(x_0), \quad D_v f(x_0), \quad f_v(x_0)$$

Osservazione Le derivate direzionali hanno due problemi

- 1) Sono scomode da calcolare velocemente
- 2) Analogamente a quanto visto per la continuità, pur conoscendo le derivate direzionali in punto interno x_0 lungo tutte le direzioni non nulle, queste derivate non sono sufficienti a descrivere precisamente il comportamento di f localmente in x_0 .

Definizione Siano $f: X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{Int}(X)$

La derivata direzionale di f in x_0 rispetto alla direzione e_i si dice

DERIVATA PARZIALE di f rispetto alla variabile x_i e si denota con

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0), \quad \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_0), \quad f_{x_i}(x_0), \quad \partial_{x_i} f(x_0), \quad \partial_i f(x_0), \quad D_{x_i} f(x_0), \quad D_i f(x_0)$$

$$\begin{aligned} \text{Quindi } \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h e_i) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0^1, \dots, x_0^i + h, \dots, x_0^m) - f(x_0^1, \dots, x_0^m)}{h} \end{aligned}$$

$$\text{con } x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^m)$$

In altri termini, quando calcoliamo la derivata parziale di f rispetto ad x_j stiamo facendo la derivata rispetto ad x_j trattando le altre variabili $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ come costanti

Esempi

$$1) \quad f(x, y, z) = y + x^2 + z^4 \quad f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 4z^3$$

$$2) \quad f(x, y) = x^2 y + 2x \cos(y) \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\partial_x f(x, y) = 2xy + 2 \cos y$$

$$\partial_y f(x, y) = x^2 - 2x \sin y$$

$$3) \quad f(x, y, z) = z^2 \sin(xy^2(1+z)) \quad f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_x(x, y, z) = z^2 \cos(xy^2(1+z)) \cdot y^2(1+z) = y^2 z^2(1+z) \cos(xy^2(1+z))$$

$$f_y(x, y, z) = z^2 \cos(xy^2(1+z)) \cdot 2y \cdot x(1+z) = 2xy z^2(1+z) \cos(xy^2(1+z))$$

$$f_z(x, y, z) = 2z \sin(xy^2(1+z)) + z^2 \cos(xy^2(1+z)) \cdot xy^2$$

$$4) \quad f(x, y) = xy e^{x^2+3y^2} \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y e^{x^2+3y^2} + xy e^{x^2+3y^2} (2x) = y(1+2x^2) e^{x^2+3y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x e^{x^2+3y^2} + xy e^{x^2+3y^2} 6y = x(1+6y^2) e^{x^2+3y^2}$$

Definizione Siano $f: X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \text{Int}(X)$

Si dice che f è **DERIVABILE** in x_0 se esistono tutte le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0)$.

In tal caso si chiama **GRADIENTE** di f in x_0 il vettore

$$\nabla f(x_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0) \right) \in \mathbb{R}^m$$

le cui componenti sono le derivate parziali di f in x_0 .

Il gradiente si denota con i seguenti simboli:

$$\nabla f(x_0), \text{ grad } f(x_0), Df(x_0)$$

NB: Il simbolo ∇ si legge 'NABLA'

Esempi

$$1) \quad f(x, y, z) = (2x - y + z^2)^2 \quad f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 4(2x - y + z^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -2(2x - y + z^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 4z(2x - y + z^2)$$

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right)$$

$$2) \quad f(x) = \|x\|^2 \quad f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

Risolviamo f esplicitando la dipendenza dalle singole variabili:

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{j=1}^m x_j^2 = x_1^2 + \dots + x_m^2$$

$$\forall j \in \{1, \dots, m\} \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 2x_j$$

$$\text{Pertanto} \quad \nabla f(x_1, \dots, x_m) = (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_m) = 2(x_1, \dots, x_m)$$

$$\text{cioè} \quad \nabla f(x) = 2x$$

Osservazione Sia $X \subset \mathbb{R}^m$ insieme aperto non vuoto. Supponiamo che

$f: X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ sia derivabile in X (cioè, $\forall x \in X : f$ è derivabile in x)

Allora le funzioni derivate parziali di f

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$\vdots$

$$\frac{\partial f}{\partial x_m} : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

sono funzioni scalari di m -variabili reali, mentre le funzioni gradienti

$\nabla f : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ è un campo vettoriale

Osservazione Come nel caso unidimensionale, esistono funzioni non derivabili

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{dom}(f) = \mathbb{R}^2$$

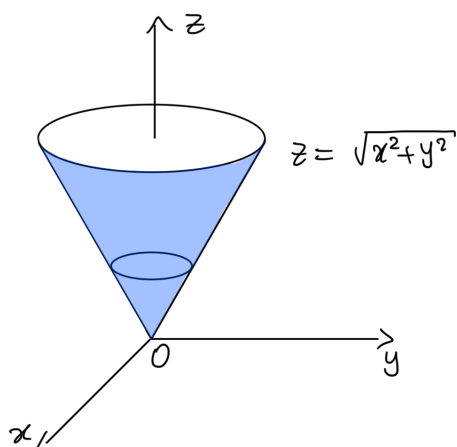
Osserviamo che $x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$

$$\begin{aligned} \text{Per } (x,y) \neq (0,0) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

Calcoliamo i limiti dei rapporti incrementali rispetto ad x e ad y nell'origine

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} \quad \nexists \Rightarrow \nexists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} \quad \nexists \Rightarrow \nexists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$



Osservazione Siano $X \subset \mathbb{R}^m$ insieme aperto e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$

Se $m \geq 2$ allora f derivabile $\not\Rightarrow f$ continua

Mostriamo un controesempio di funzione di più variabili derivabile ma non continua

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Facciamo vedere che f è derivabile in $(0,0)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Quindi f è derivabile in 0 e $\nabla f(0,0) = (0,0)$

Proviamo che f non è continua in $(0,0)$.

Se per assurdo f fosse continua in $(0,0)$, avremmo $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$

In particolare, la restrizione di f sulla retta $y=x$ sarebbe continua

$$\text{ma } f(x,x) = \frac{x \cdot x}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

pertanto f non è continua in $(0,0)$.

Definizione Siano $f: X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \text{Int}(X)$

Si dice che f è **DIFFERENZIABILE** in x_0 se f è derivabile in x_0

(ovvero se esiste $\nabla f(x_0)$) e se vale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \nabla f(x_0) \cdot h}{\|h\|} = 0$$

NB: Nel limite precedente

$$h = (h_1, \dots, h_m) \in \mathbb{R}^m$$

$$\nabla f(x_0) \cdot h = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) h_j \quad \text{è il prodotto scalare tra i vettori } \nabla f(x_0), h$$

$$\|h\| = \left(\sum_{j=1}^m h_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{è la norma di } h$$

Osservazione fondamentale Se $m=1$, cioè per funzioni di una singola variabile reale

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{|h|} = 0 \end{aligned}$$

Peranto in dimensione 1, derivabilità e differenziabilità sono proprietà equivalenti

Teorema (proprietà delle funzioni differenziabili)

Siano $f: X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \text{Int}(X)$

Se f è differenziabile in x_0 allora

- 1) f è continua in x_0 ;
- 2) f è derivabile in x_0 ;
- 3) Esistono tutte le derivate direzionali di f in x_0 .

Inoltre $\forall v \in \mathbb{R}^m, v \neq (0, \dots, 0)$ si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v$$

Definizione Siano $X \subset \mathbb{R}^m$ insieme aperto, $f: X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

Diciamo che f è una **FUNZIONE DI CLASSE $\mathcal{C}^1$ IN X** e scriviamo $f \in \mathcal{C}^1(X)$

se le derivate parziali di f $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}: X \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni continue

TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE

Sia $X \subset \mathbb{R}^m$ un insieme aperto. Se $f \in \mathcal{C}^1(X)$ allora f è differenziabile in X

Osservazione Il teorema precedente è un risultato fondamentale che ci permette di stabilire la differenziabilità di una funzione semplicemente controllando la continuità delle derivate parziali, senza dover calcolare il limite

$$\lim_{\mathbb{R}^m \ni h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \nabla f(x_0) \cdot h}{\|h\|}$$

Tutte le funzioni degli esempi precedenti in cui abbiamo calcolato le derivate parziali sono funzioni differenziabili, ad esclusione della funzione $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ che non è differenziabile in $(0,0)$ e della funzione utilizzata come controesempio per mostrare f derivabile $\nRightarrow f$ continua.

Un maniera analogo a quanto visto nel caso scalare, introduciamo la definizione di punto di massimo e minimo locali (o relativi)

(la definizione di massimo e minimo assoluti o globali è stata data dopo il Teorema di Weierstrass)

Definizione Siano $f: X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$

- Diciamo che x_0 è un PUNTO di MINIMO LOCALE per f in X se $\exists U \subset \mathbb{R}^m$ intorno di x_0 tale che $\forall x \in X \cap U: f(x_0) \leq f(x)$
- Diciamo che x_0 è un PUNTO di MASSIMO LOCALE per f in X se $\exists U \subset \mathbb{R}^m$ intorno di x_0 tale che $\forall x \in X \cap U: f(x_0) \geq f(x)$

TEOREMA di FERMAT per funzioni di più variabili (condizioni necessarie del 1° ordine)

Siano $f: X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \text{Int}(X)$.

Se x_0 è un punto di estremo relativo (ovvero, x_0 è un punto di minimo relativo oppure x_0 è un punto di massimo relativo) e f è derivabile in x_0 , allora $\nabla f(x_0) = (0, \dots, 0)$

Definizione Siano $f: X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \text{Int}(X)$.

Se f è derivabile in x_0 e $\nabla f(x_0) = (0, \dots, 0)$ diciamo che x_0 è un **PUNTO CRITICO** per f

Possiamo riformulare il teorema di Fermat dicendo che i punti interni di estremo relativo sono punti critici della f .

Come nel caso unidimensionale, il teorema di Fermat ci dà solamente una condizione necessaria per i massimi e i minimi locali, infatti esistono

punti critici che non sono né punti di massimo relativo né punti di minimo relativo, i cosiddetti **PUNTI di SELLA** (o **COLLE**).

Esempi

1) la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ ha un punto di minimo assoluto in $(0,0)$

$$(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : f(x,y) > 0 = f(0,0))$$

In particolare, $(0,0)$ è un punto di minimo relativo

Controlliamo che il gradiente di f sia nullo in $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$$

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$$

Osserviamo che $(0,0)$ è l'unico punto critico di f

2) la funzione $f(x,y) = x^2 - y^2$ ha un punto di sella in $(0,0)$

(il grafico di f è una quadrica detta PARABOLOIDE IPERBOLICO)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$$

$$\nabla f(x,y) = (2x, -2y)$$

∇f si annulla in $(0,0)$, ma $(0,0)$ non può essere né punto di minimo relativo né punto di massimo relativo.

Infatti lungo l'asse x ($y=0$) f ha un punto di minimo in $x=0$
mentre lungo l'asse y ($x=0$) f ha un punto di massimo in $x=0$

Ripartiamo ora la versione multidimensionale del seguente risultato

$I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile, $f' \equiv 0 \Rightarrow f$ costante in I

Teorema Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e connesso per poligomoli.

Se $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione derivabile tale che $\forall x \in X : \nabla f(x) = (0, \dots, 0)$,
allora f è costante in X .

DERIVATE PARZIALI DEL 2° ORDINE

Come possiamo determinare condizioni necessarie per individuare punti di massimo e minimo relativo interni al dominio di una funzione di più variabili?

Nel caso unidimensionale studiavamo il segno di f' in un intorno del punto stazionario x_0 . Per $n \geq 2$ questo non ha più senso perché il gradiente ∇f è un vettore e quindi non possiamo "studiare il segno".

In dimensione 1, un'altra possibilità consisteva nello studiare il segno di $f''(x_0)$:

se $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ è convessa in un intorno di $x_0 \Rightarrow x_0$ è punto di minimo locale per f

se $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ è concava in un intorno di $x_0 \Rightarrow x_0$ è punto di massimo locale per f

Per $n \geq 2$ seguiremo questa seconda strada, tuttavia dobbiamo prima introdurre il concetto di "derivate seconde" per una funzione di più variabili e quindi capire in che senso vogliamo studiare il "segno" di queste derivate seconde.

SPOILER: la derivata seconda di una funzione di più variabili sono un oggetto molto più complicato da gestire rispetto al caso unidimensionale!!

Definizione Siano $X \subset \mathbb{R}^n$ insieme aperto e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ funzione derivabile in X .

Siano $i, j \in \{1, \dots, n\}$ (non necessariamente distinti)

Se la funzione $\frac{\partial f}{\partial x_i}: X \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile parzialmente rispetto ad x_j nel punto $x_0 \in X$

possiamo definire la derivata parziale seconda rispetto x_i e x_j in x_0 per f

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (x_0)$$

Questa derivata si denota con i seguenti simboli

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x_0), \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x_0), \quad f_{x_i x_j}(x_0), \quad \partial_{x_i x_j}^2 f(x_0), \quad \partial_{ij}^2 f(x_0), \quad D_{x_i x_j}^2 f(x_0), \quad D_{ij}^2 f(x_0)$$

se $i \neq j$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x_0)$ è detta DERIVATA SECONDA MISTA

se $i = j$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} (x_0)$ è detta DERIVATA SECONDA PURA e si denota anche

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} (x_0), \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x_0), \quad \partial_{x_i}^2 f(x_0), \quad \partial_i^2 f(x_0), \quad D_{x_i}^2 f(x_0), \quad D_i^2 f(x_0)$$

Osservazione Le derivate parziali del secondo ordine di una funzione $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sono n^2

Definizione Siano $X \subset \mathbb{R}^m$ insieme aperto, $x_0 \in X$ e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ funzione derivabile in X .

Diciamo che f è **DERIVABILE DUE VOLTE** in x_0 se

$\forall i, j \in \{1, \dots, m\}$ esiste la derivata parziale $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$.

In tal caso si chiama **MATRICE HESSIANA** di f nel punto x_0 la tabella

$$H_f(x_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(x_0) \end{pmatrix}$$

La matrice Hessiana si denota con uno dei seguenti simboli

$$H_f(x_0), \quad \text{Hess } f(x_0), \quad \nabla^2 f(x_0), \quad D^2 f(x_0), \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}$$

Osservazione Che cosa è una matrice??

Nelle prossime paragrafi riportaremo la definizione di matrice e alcune proprietà elementari.

Definizione Siano $X \subset \mathbb{R}^m$ insieme aperto e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$.

Diciamo che f è una **FUNZIONE DI CLASSE $\mathcal{C}^2$ IN X** e scriviamo $f \in \mathcal{C}^2(X)$ se $\forall i, j \in \{1, \dots, m\}$ esiste ed è continua la funzione $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}: X \rightarrow \mathbb{R}$

TEOREMA DI SCHWARZ

Siano $X \subset \mathbb{R}^m$ un insieme aperto e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile due volte in X .

Se $f \in \mathcal{C}^2(X)$ allora $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \quad \forall i, j \in \{1, \dots, m\}, \forall x \in X$.

Esempio

$$f(x,y) = x^2 y$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy$$

$$\nabla f(x,y) = (2xy, x^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2x$$

Osserviamo che $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ come predetto dal teorema di Schwarz

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$$

MATRICI

Definizione Siano m, n numeri naturali ≥ 1

Una **MATRICE** $m \times n$ è una tabella di $m \cdot n$ numeri (reali)
con m righe e n colonne

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

a_{ij} denota l'elemento di posto (i,j) nella matrice A

i denota il numero di riga, j denota il numero di colonna

(si usa anche la notazione a_j^i al posto di a_{ij})

Se $m = n$ la matrice A si dice **QUADRATA**

Esempi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{n} & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{è una matrice } 2 \times 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ n & 6 \end{pmatrix} \quad \text{è una matrice } 2 \times 2$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \\ -1 & 15 \end{pmatrix} \quad \text{è una matrice } 3 \times 2$$

Operazioni tra matrici

ADDIZIONE

Due matrici con lo stesso numero di righe e colonne si possono sommare componente per componente

$$\text{Se } A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}, \quad B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$\text{allora } A+B := (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE REALE

Possiamo sempre moltiplicare una matrice per un numero reale, moltiplicando componente per componente gli elementi della matrice per lo scalare

$$\text{Se } \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$\text{allora } \lambda A := (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Esempio

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2n \end{pmatrix}$$

PRODOTTO TRA MATRICI

Possiamo moltiplicare le matrici A e B se e soltanto se il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B , in tal caso la matrice $A \cdot B$ ha lo stesso numero di righe di A e lo stesso numero di colonne di B e l'elemento di posto (i, j) di $A \cdot B$ si ottiene facendo il prodotto scalare tra la i -esima riga di A e la j -esima colonna di B .

Un simbolo, se $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ matrice $m \times n$

$B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}}$ matrice $m \times p$

$A \cdot B = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}}$ è una matrice $m \times p$ e

$$c_{ij} = \underbrace{(a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in})}_{i\text{-esima riga di } A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix}}_{j\text{-esima colonna di } B} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Vista la definizione precedente, il prodotto tra matrici è anche detto
PRODOTTO RIGHE PER COLONNE

Esempio

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \uparrow$
matrice 2×2 matrice 2×1 matrice 2×1

$$b_1 = (a_{11} \ a_{12}) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

$$b_2 = (a_{21} \ a_{22}) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

$$\text{Dunque} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

Calcolo ora

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

matrice 1×2 matrice 2×1

si dimostra che il prodotto tra matrici
è associativo (ma non commutativo)

Il prodotto di una matrice 1×2 con una matrice 2×1 è una matrice 1×1 che identifichiamo con un numero reale

$$= y_1 (a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + y_2 (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)$$
$$= a_{11}y_1x_1 + a_{12}y_1x_2 + a_{21}y_2x_1 + a_{22}y_2x_2 = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} y_j x_i$$

la funzione $b_A : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(y, x) \mapsto y^T A x = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} y_j x_i$$

Si chiama FORMA BILINEARE associata alla matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 2}}$

Osserveremo che nel fare i calcoli nei prodotti tra matrici pensiamo ai vettori di $\mathbb{R}^2$ come "vettori colonna", ovvero come matrici 2×1 .

del tipo $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Se invece vogliamo trattare il vettore $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ come un "vettore riga", lo denotiamo $y^T = (y_1 \ y_2)$ ottenendo una matrice 1×2 .

Quando $x=y$, otteniamo la cosiddetta FORMA QUADRATICA associata ad A

Definizione (FORMA QUADRATICA ASSOCIATA AD UNA MATRICE QUADRATA)

Sia $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ una matrice $m \times n$.

Supponiamo che A sia **SIMMETRICA** (ovvero che $\forall i, j \in \{1, \dots, m\} : a_{ij} = a_{ji}$)

Si chiama FORMA QUADRATICA associata ad A la funzione

$$q_A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{definierte quadratisch} \quad q_A(x) = x^T A x = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} x_i x_j$$

Introduciamo la seguente classificazione per la matrice A , sulla base del segno della forma quadratica associata q_A

- A è **DEFINITA POSITIVA** cioè $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq (0, \dots, 0) : q_A(x) > 0$;
- A è **DEFINITA NEGATIVA** cioè $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq (0, \dots, 0) : q_A(x) < 0$;
- A è **SEMIDEFINITA POSITIVA** cioè $\forall x \in \mathbb{R}^n : q_A(x) \geq 0$;
- A è **SEMIDEFINITA NEGATIVA** cioè $\forall x \in \mathbb{R}^n : q_A(x) \leq 0$;
- A è **INDEFINITA** cioè $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ tali che $q_A(x_1) > 0$ e $q_A(x_2) < 0$.

Ovviamente

A definita positiva $\Rightarrow A$ semidefinita positiva

A definita negativa $\Rightarrow A$ semidefinita negativa

Non valgono in generale i viceversa.

Quando parleremo di matrici semidefinite (positive o negative)

significheremo due tali matrici non sono anche definite,

ovvero che esistono vettori non nulli su cui la forma quadratica si annulla.

Infine A indefinita $\Rightarrow A$ non è né semidefinita positiva né semidefinita negativa

Osservazione Il problema di determinare la segnatura di una matrice quadrata simmetrica A di dimensioni $n \times n$, ovvero stabilire se A sia definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita, è un esercizio non banale.

In generale più grande è n , maggiori difficoltà computazionali si incontrano nel classificare A .

⚠ **ATTENZIONE**: questo non significa che ci siano matrici A per cui questo non sia possibile, anzi esiste un algoritmo finito che ci permette di stabilire sempre la segnatura di A .

La branca della Matematica che si occupa di questi problemi si chiama **ALGEBRA LINEARE** (ed è un corso a parte, ben distinto dall'ANALISI MATEMATICA in molti corsi di studio UNIBA).

Noi ci limiteremo a studiare il caso 2×2 e 3×3 tramite lo studio degli autovalori di A .

DETERMINANTE di una matrice 2×2

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matrice 2×2

$\det A = ad - bc$ si chiama DETERMINANTE di A e si ottiene moltiplicando gli elementi della diagonale principale (in verde) e sottraendo al risultato di questo prodotto il prodotto degli elementi della diagonale secondaria (in blu)

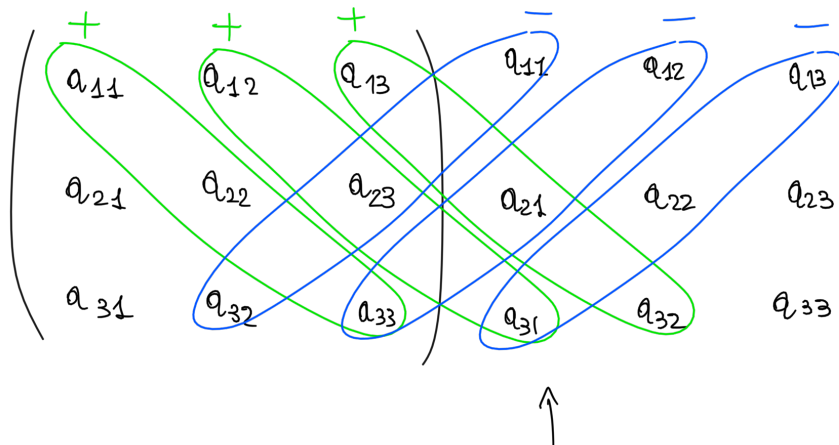
$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Determinanti di una matrice 3×3 (Regola di SARRUS)

Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ una matrice 3×3

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Si calcola mediante la cosiddetta regola di Sarrus



ricopiamo gli elementi della matrice a destra

si moltiplicano gli elementi delle tre diagonali principali (in verde) e delle tre diagonali secondarie (in blu), e si sommano questi sei prodotti prendendo con segno + quelli provenienti dalle diagonali principali e con segno - quelli provenienti dalle diagonali secondarie

Esempi

$$1) \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 2 - 0 \cdot 1 = -2$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1 \cdot 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 3 \cdot 4 - 4 \cdot (-1) \cdot 1 - 0 \cdot 3 \cdot 0 - 0 \cdot 2 \cdot 0 = 0 + 4 = 4$$

POLINOMIO CARATTERISTICO

Matrice 2x2

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matrice 2x2

Si chiama POLINOMIO CARATTERISTICO di A il polinomio (nella variabile λ)

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc$$

$$= \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)$$

dove $\text{tr}(A) = a+d$ è la somma degli elementi della diagonale principale di A

Matrice 3x3

Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ una matrice 3x3

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda) + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - (a_{11}-\lambda)a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}(a_{33}-\lambda) - a_{13}(a_{22}-\lambda)a_{31} \end{aligned}$$

regole di
Sarrus

$$= -\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2$$

$$+ (a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} - a_{11}a_{22} - a_{11}a_{33} - a_{22}a_{33})\lambda$$

$$+ a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= -\lambda^3 + \text{tr}(A)\lambda^2 - \left(\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right) \lambda + \det(A)$$

Osservazione Per calcolare il polinomio caratteristico di una matrice 3×3 non usiamo le complicate regole precedenti, ma applichiamo molte volte la regola di Sarrus.

Definizione Sia A matrice quadrata.

Le radici del polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$ si chiamano **AUTOVALORI**

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(2-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 2\lambda - 1$$

Le radici di $p_A(\lambda)$ sono $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = 1 \pm \sqrt{2}$ autovaleori di A

TEOREMA di SYLVESTER (versione semplificata)

Sia A una matrice reale e simmetrica $n \times n$.

Il polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$ ammette n -radici reali contate con le rispettive molteplicità.

Dalla formulazione generale del Teorema di Sylvester (che noi non enunciamo perché abbiamo trascurato molti concetti dell'Algebra Lineare), segue il prossimo criterio per stabilire la segnatura di una matrice reale simmetrica

Teorema

Sia A una matrice reale simmetrica $n \times n$.

- Se tutti gli autovaleori di A sono positivi allora A è definita positiva.
- Se tutti gli autovaleori di A sono negativi allora A è definita negativa.
- Se tutti gli autovaleori di A sono non-negativi allora A è semidefinita positiva.
- Se tutti gli autovaleori di A sono non-positivi allora A è semidefinita negativa.
- Se esistono due autovaleori di segno opposto di A allora A è indefinita.

Osservazione

Se A è una matrice $n \times n$, $p_A(\lambda)$ è un polinomio di grado n .

Per $n \geq 3$ in generale è difficile calcolare esplicitamente le radici di $p_A(\lambda)$.

Dal teorema precedente vediamo che in realtà non siamo tanto interessati a calcolare le radici di $p_A(\lambda)$ quanto a determinarne precisamente il segno (ed eventualmente la molteplicità di $\lambda=0$, ma questo è facile).

Infine applichiamo quanto abbiamo imparato sulle forme quadratiche allo studio della signature della matrice Hessiana in un punto critico.

Infatti valgono i seguenti risultati:

Teorema (Condizione necessarie del 2° ordine)

Siano $X \subset \mathbb{R}^m$ insieme aperto, $x_0 \in X$ e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ funzione di classe $\mathcal{C}^2$ in un intorno del punto estremo relativo x_0 .

Se x_0 è punto di minimo relativo allora $H_f(x_0)$ è semidefinita positiva.

Se x_0 è punto di massimo relativo allora $H_f(x_0)$ è semidefinita negativa.

Teorema (Condizione sufficiente del 2° ordine)

Siano $X \subset \mathbb{R}^m$ insieme aperto, $x_0 \in X$ e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ funzione di classe $\mathcal{C}^2$ in un intorno di x_0 tale da $\nabla f(x_0) = (0, \dots, 0)$.

Se $H_f(x_0)$ è definita positiva allora x_0 è punto di minimo relativo.

Se $H_f(x_0)$ è definita negativa allora x_0 è punto di massimo relativo.

Se $H_f(x_0)$ è indefinita allora x_0 è punto di sella.

Osservazione Per il Teorema di Schwarz la matrice Hessiana $H_f(x_0)$ è simmetrica se f è di classe $\mathcal{C}^2$ in un intorno di x_0 .

Pertanto studiando il segno degli autovalori di $H_f(x_0)$ possiamo determinare la signature.

Esempio $f(x, y) = x^2 - x^4 + y^2$ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Cerchiamo eventuali punti di massimo e di minimo locali.

1) Cominciamo col determinare i punti critici

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 4x^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4x^3 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1 - 2x^2) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x^2 = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = 0 \end{cases}$$

Abbiamo trovato 3 punti critici

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad P_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

2) Calcoliamo la matrice Hessiana

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2-12x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Studiamo la segnoatura di H_f nei punti critici P_1, P_2, P_3

$$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_{H_f(P_1)} = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2$$

$\lambda=2$ è una radice doppia del polinomio caratteristico

Gli autovalori di $H_f(P_1)$ sono positivi $\Rightarrow H_f(P_1)$ è definita positiva
 $\Rightarrow P_1$ è punto di minimo locale

$$H_f(P_{2/3}) = \begin{pmatrix} 2-12 \cdot \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_{H_f(P_{2/3})} = \det \begin{pmatrix} -\lambda-4 & 0 \\ 0 & -\lambda+2 \end{pmatrix} = (-\lambda-4)(-\lambda+2) = (\lambda+4)(\lambda-2)$$

$\lambda=2, \lambda=-4$ sono gli autovalori di $H_f(P_{2/3})$

Ci sono autovalori di $H_f(P_{2/3})$ di segno opposto $\Rightarrow H_f(P_{2/3})$ è indefinita

$\Rightarrow P_2, P_3$ sono punti di sella

FORMULA di TAYLOR (per funzioni di più variabili)

Formula di Taylor del 1° ordine (con resto secondo Peano)

Siano $X \subset \mathbb{R}^m$ insieme aperto, $x_0 \in X$ e f di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno di x_0 .

$$\text{Allora } f(x_0+h) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot h + o(\|h\|) \quad \text{per } h \rightarrow \underset{\mathbb{R}^m}{(0, \dots, 0)}$$

Formule di Taylor del 2° ordine (con resto secondo Peano)

Siano $X \subset \mathbb{R}^m$ insieme aperto, $x_0 \in X$ e f di classe $\mathcal{C}^2$ in un intorno di x_0 .

$$\begin{aligned} \text{Allora } f(x_0+h) &= f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} h^T \cdot \nabla^2 f(x_0) h + o(\|h\|^2) \\ &= f(x_0) + \underbrace{\sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) h_j}_{\text{prodotto scalare tra } \nabla f(x_0) \text{ e } h \in \mathbb{R}^m} + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{j,k=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x_0) h_j h_k}_{\text{forma quadratica associata alla matrice Hessiana } \nabla^2 f(x_0) \text{ calcolata in } h \in \mathbb{R}^m} + o(\|h\|^2) \end{aligned}$$

per $h \rightarrow (0, \dots, 0)$

prodotto scalare
tra $\nabla f(x_0)$ e $h \in \mathbb{R}^m$

forma quadratica associata
alla matrice Hessiana $\nabla^2 f(x_0)$
calcolata in $h \in \mathbb{R}^m$

Formule di Taylor (con resto secondo Peano)

Siano $X \subset \mathbb{R}^m$ insieme aperto, $x_0 \in X$ e f di classe $\mathcal{C}^k$ in un intorno di x_0 .

Allora

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) h_j + \frac{1}{2!} \sum_{j_1, j_2=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}}(x_0) h_{j_1} h_{j_2} \\ &\quad + \frac{1}{3!} \sum_{j_1, j_2, j_3=1}^m \frac{\partial^3 f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \partial x_{j_3}}(x_0) h_{j_1} h_{j_2} h_{j_3} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{k!} \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^m \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}(x_0) h_{j_1} \dots h_{j_k} + o(\|h\|^k) \end{aligned}$$

per $h \rightarrow (0, \dots, 0)$.

DIFFERENZIABILITÀ DELLE FUNZIONI VETTORIALI

Ricordiamo che per una funzione $f: X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{Int}(X)$

la differenziabilità di f in x_0 significa (per definizione) esistenza del valore al limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - \nabla f(x_0) \cdot h}{\|h\|} = 0$$

Osserviamo che il quoziente precedente rappresenta una funzione scalare che dipende dalla variabile $h \in \mathbb{R}^m$.

Come dobbiamo modificare la definizione precedente se f è una funzione a valori vettoriali? Osserviamo che il prodotto scalare $\nabla f(x_0) \cdot h$ può anche essere pensato come prodotto righe per colonne tra

il vettore riga $\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0) \right)$ (matrice $1 \times m$) e

il vettore colonna $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}$ (matrice $1 \times m$)

Se $f: X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ il numeratore nel limite precedente deve essere una funzione a valori in $\mathbb{R}^n$ che dipende dal parametro $h \in \mathbb{R}^m$.

Aggiudic tutto abbia senso, dobbiamo considerare $\nabla f(x_0)$ come una matrice $m \times n$ mentre il prodotto $\nabla f(x_0) \cdot h$ è un prodotto righe per colonne.

Definizione Siano $f = (f_1, \dots, f_m) : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $x_0 \in \text{Int}(X)$.

Si chiama **MATRICE JACOBIANA** di f in x_0 la matrice $m \times n$

$$J_f(x_0) := \begin{pmatrix} \nabla f_1(x_0) \\ \nabla f_2(x_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

La matrice Jacobiana si denota con i seguenti simboli

$$J_f(x_0), \nabla f(x_0), Df(x_0), \frac{\partial (f_1, \dots, f_m)}{\partial (x_1, \dots, x_n)}, \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Definizione Siano $f = (f_1, \dots, f_m) : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $x_0 \in \text{Int}(X)$.

Diciamo che f è **DIFFERENZIABILE** in x_0 se

1) f è derivabile in x_0 , ovvero se esiste la matrice Jacobiana $J_f(x_0)$;

$$2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - J_f(x_0) \cdot h}{\|h\|} = 0,$$

dove $J_f(x_0) \cdot h$ è il prodotto matriciale tra

la matrice Jacobiana $J_f(x_0)$ (matrice $m \times n$)

il vettore colonna $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$ (matrice $n \times 1$)

Ricordiamo che $f = (f_1, \dots, f_m) : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è continua in x_0 se e soltanto se le funzioni componenti $f_1, \dots, f_m : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sono continue in x_0 .

Il prossimo risultato ci dice che vale una proprietà analoga per la differenziabilità.

Proposizione Siano $\varphi = (f_1, \dots, f_m): X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $x_0 \in \text{Int}(X)$

Sono equivalenti le seguenti affermazioni

- a) φ è differenziabile in x_0 ;
- b) $f_1, \dots, f_m$ sono differenziabili in x_0 .

Osservazione Siano $X \subset \mathbb{R}^n$ insieme aperto e $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^2(X)$

Allora la matrice Hessiana di φ non è altro che la matrice Jacobiana

del campo vettoriale $\nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right): X \rightarrow \mathbb{R}^n$, in simboli:

$$H_\varphi = J_{\nabla \varphi}$$

Introduciamo infine due operatori differenziali molto usati nelle applicazioni

Definizione Siano $X \subset \mathbb{R}^n$ insieme aperto e $\varphi = (f_1, \dots, f_m): X \rightarrow \mathbb{R}^m$ campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^1(X)$.

Si chiama **DIVERGENZA** di φ l'operatore differenziale

$$\text{div } \varphi := \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial x_j} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_m}$$

La divergenza di φ si denota anche $\nabla \cdot \varphi$

Definizione Siano $X \subset \mathbb{R}^n$ insieme aperto e $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ funzione di classe $\mathcal{C}^2$

Si chiama **LAPLACIANO** di φ l'operatore differenziale

$$\Delta \varphi := \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_n^2}$$

Osservazione

$$\Delta \varphi = \text{tr } H_\varphi$$

$$\Delta \varphi = \text{div}(\text{grad } \varphi) = \nabla \cdot \nabla \varphi$$

Esercizio

Consideriamo la funzione reale di tre variabili reali

$$f: D \rightarrow \mathbb{R} \quad D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z \neq 0\}$$

$$f(x, y, z) := \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + xyz$$

Calcoliamo i punti critici di f

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = -\frac{1}{x^2} + yz$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -\frac{1}{y^2} + xz$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -\frac{1}{z^2} + xy$$

Pertanto

$$\nabla f(x, y, z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{x^2} + yz = 0 \\ -\frac{1}{y^2} + xz = 0 \\ -\frac{1}{z^2} + xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x^2} = yz \\ \frac{1}{y^2} = xz \\ \frac{1}{z^2} = xy \end{cases}$$

In particolare, notiamo che un punto critico deve necessariamente avere componenti tutte dello stesso segno (o tutte positive o tutte negative)

Dalle ultime due equazioni ricaviamo

$$y = \frac{1}{xz^2}, \quad z = \frac{1}{xy^2}$$

Sostituendo queste espressioni nella prima equazione otteniamo

$$\frac{1}{x^2} = yz = \frac{1}{x^2 y^2 z^2} \Rightarrow y^2 z^2 = 1$$

analogamente ricaviamo che $x^2 y^2 = 1$ e $x^2 z^2 = 1$

Dunque

$$\nabla f(x, y, z) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} x^2 y^2 = 1 \\ x^2 z^2 = 1 \\ y^2 z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 y^2 = 1 \\ x^2 = \frac{1}{z^2} \\ y^2 = \frac{1}{z^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{z^4} = 1 \\ x^2 = \frac{1}{z^2} \\ y^2 = \frac{1}{z^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z^4 = 1 \\ x^2 = \frac{1}{z^2} \\ y^2 = \frac{1}{z^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \pm 1 \\ x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases} \quad (\text{unide radici quarte reali di } 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \\ z = \pm 1 \end{cases} \quad (\text{condizioni necessarie ma non sufficienti per essere punti critici})$$

Ci ricordiamo che i punti critici di f devono avere componenti tutte dello stesso segno, quindi tra gli otto punti trovati, in realtà solo due sono punti critici: $P_1 = (1, 1, 1)$, $P_2 = (-1, -1, -1)$

Per stabilire se questi punti critici sono punti di massimo relativo / minimo relativo oppure punti di sella, calcoliamo in primo luogo la matrice Hessiana, quindi determiniamo gli autovalori di H_f nei punti P_1 e P_2

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = -\frac{1}{z^2} + yz, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -\frac{1}{y^2} + xz, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -\frac{1}{z^2} + xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = \frac{2}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) = z, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) = y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) = z, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) = \frac{2}{y^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) = x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) = y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) = x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = \frac{2}{z^3}$$

Osserviamo che la matrice Hessiana è simmetrica

(sapevamo già a priori che sarebbe stata tale, grazie al teorema di Schwarz)

$$\text{Dunque} \quad H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & z & y \\ z & \frac{2}{y^3} & x \\ y & x & \frac{2}{z^3} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico di H_f con la regola di Sarrus

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} - \lambda & z & y \\ z & \frac{2}{y^3} - \lambda & x \\ y & x & \frac{2}{z^3} - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{2}{x^3} - \lambda \right) \left(\frac{2}{y^3} - \lambda \right) \left(\frac{2}{z^3} - \lambda \right) + zxy + yzx \\ &\quad - \left(\frac{2}{x^3} - \lambda \right) x^2 - \left(\frac{2}{z^3} - \lambda \right) z^2 - \left(\frac{2}{y^3} - \lambda \right) y^2 \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 \left(\frac{2}{x^3} + \frac{2}{y^3} + \frac{2}{z^3} \right) - \lambda \left(\frac{4}{x^3 y^3} + \frac{4}{x^3 z^3} + \frac{4}{y^3 z^3} \right) + \frac{8}{x^3 y^3 z^3} + 2xyz \\ &\quad - \frac{2}{x} + \lambda x^2 - \frac{2}{z} + \lambda z^2 - \frac{2}{y} + \lambda y^2 \\ &= -\lambda^3 + 2 \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} \right) \lambda^2 + \left((x^2 + y^2 + z^2) - 4 \left(\frac{1}{x^3 y^3} + \frac{1}{x^3 z^3} + \frac{1}{y^3 z^3} \right) \right) \lambda \\ &\quad + \frac{8}{x^3 y^3 z^3} + 2xyz - 2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \end{aligned}$$

Se $(x, y, z) = P_1$ allora

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 4)$$

$\Rightarrow$ gli autovalori di $H_f(P_1)$ sono 1 (multiplicità 2) e 4

$\Rightarrow H_f(P_1)$ è una matrice definita positiva

$\Rightarrow P_1$ è un punto di massimo relativo

Se $(x, y, z) = P_2$ allora

$$P(\lambda) = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 9\lambda - 4 = -(\lambda + 1)^2(\lambda + 4)$$

$\Rightarrow$ gli autovalori di $H_f(P_2)$ sono -1 (multiplicità 2) e -4

$\Rightarrow H_f(P_2)$ è una matrice definita negativa

$\Rightarrow P_2$ è un punto di massimo relativo