

Esercizi di preparazione al compito scritto

ES3 Traccia A

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (e^x - \cos x - \sin x)}{\log(1+2x^2) + \cos(2x) - 1}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\begin{aligned} e^x - \cos x - \sin x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \\ &\quad - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &= x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\log(1+2x^2) = 2x^2 - \frac{(2x^2)^2}{2} + o(x^4) = 2x^2 - 2x^4 + o(x^4)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$\cos(2x) = 1 - 2x^2 + \frac{16x^4}{24} + o(x^4) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$\begin{aligned} \log(1+2x^2) + \cos(2x) - 1 &= 2x^2 - 2x^4 + o(x^4) + 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) - 1 \\ &= \left(-2 + \frac{2}{3}\right)x^4 + o(x^4) = -\frac{4}{3}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (e^x - \cos x - \sin x)}{\log(1+2x^2) + \cos(2x) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + o(x^4)}{-\frac{4}{3}x^4 + o(x^4)} = \frac{1}{-\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}$$

Es 2 Tracce A

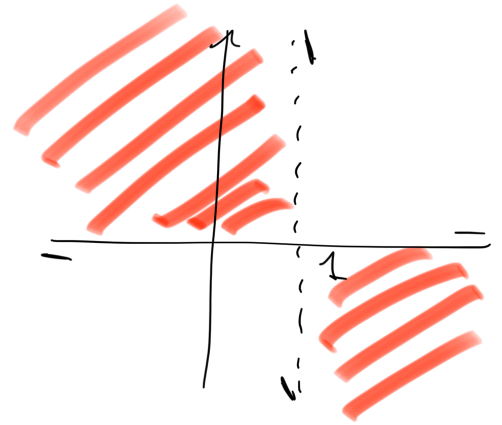
$$f(x) = \frac{e^{-x^2}}{x-1}$$

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Studio del segno

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{e^{-x^2}}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

f non ha zeri



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x^2}}{x-1} = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{-x^2}}{x-1} = -\infty$$

$x=1$ è asintoto verticale

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$$

$$f(x) = \frac{e^{-x^2}}{x-1}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^{-x^2})'(x-1) - e^{-x^2} \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{-2x e^{-x^2} (x-1) - e^{-x^2}}{(x-1)^2} = \frac{e^{-x^2}}{(x-1)^2} (-2x(x-1) - 1) \\ &= \frac{e^{-x^2}}{(x-1)^2} (-2x^2 + 2x - 1) \end{aligned}$$

cerchiamo i punti stazionari $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{-x^2}}{(x-1)^2} (-2x^2 + 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow e^{-x^2} (-2x^2 + 2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + 2x - 1 = 0 \quad \text{non ha soluzioni}$$

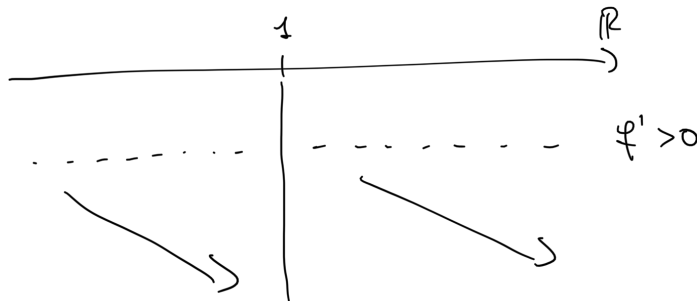
$$\Delta = 4 - 4 \cdot (-2) \cdot (-1) = -4 < 0$$

studiamo il segno di f'

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{e^{-x^2}}{(x-1)^2} (-2x^2 + 2x - 1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 + 2x - 1 > 0 \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases} \quad \text{ma}$$

unificabile

ovvero $\forall x \in \text{dom}(f) : f'(x) < 0$



f è strettamente decrescente in $(-\infty, 1)$ e in $(1, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{e^{-x^2}}{(x-1)^2} (-2x^2 + 2x - 1) = - \frac{e^{-x^2} (2x^2 - 2x + 1)}{(x-1)^2}$$

Calcoliamo f''

$$\begin{aligned} f''(x) &= - \frac{[e^{-x^2} (2x^2 - 2x + 1)]' (x-1)^2 - e^{-x^2} (2x^2 - 2x + 1) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} \\ &= - \frac{[(-2x)e^{-x^2} (2x^2 - 2x + 1) + e^{-x^2} (4x - 2)] (x-1)^2 - e^{-x^2} \cdot 2(x-1)(2x^2 - 2x + 1)}{(x-1)^4} \\ &= - \frac{e^{-x^2}}{(x-1)^3} [(-2x)(2x^2 - 2x + 1)(x-1) + (4x - 2)(x-1) - 2(2x^2 - 2x + 1)] \\ &= - \frac{e^{-x^2}}{(x-1)^3} [(2x^2 - 2x + 1)(-2x(x-1) - 2) + (4x - 2)(x-1)] \\ &= - \frac{e^{-x^2}}{(x-1)^3} [(2x^2 - 2x + 1)(-2x^2 + 2x - 2) + (4x - 2)(x-1)] \end{aligned}$$

$$(2x^2 - 2x + 1)(-2x^2 + 2x - 2) + (4x - 2)(x - 1)$$

$$= -4x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 4x^3 - 4x^2 + 4x - 2x^2 + 2x - 2 + 4x^2 - 6x + 2$$

$$= -4x^4 + 8x^3 - 6x^2 = -2x^2(2x^2 - 4x + 3)$$

$$f''(x) = \frac{e^{-x^2}}{(x-1)^3} 2x^2(2x^2 - 4x + 3)$$

punti di flesso

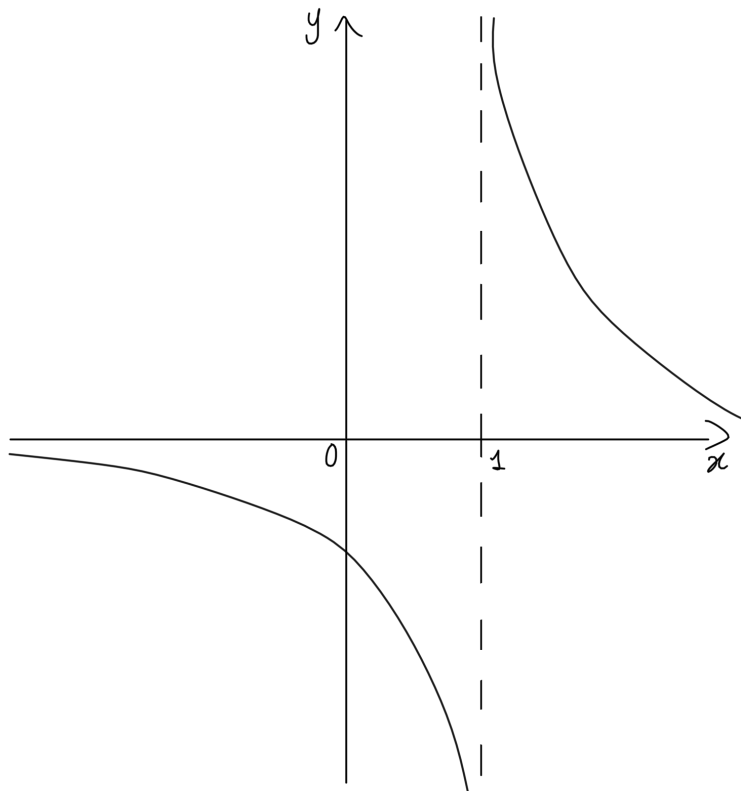
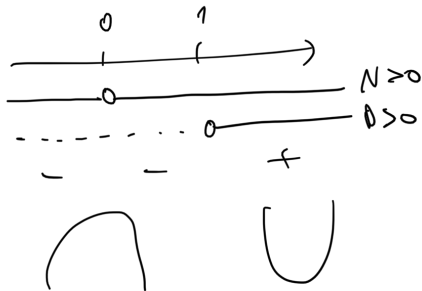
$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 = 0 \quad \vee \quad 2x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad 2x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4 \cdot 2 \cdot 3 < 0$$

Studiamo il segno di f''

$$f''(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^{-x^2}}{(x-1)^3} 2x^2(2x^2 - 4x + 3) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{x-1} > 0$$



TRACCIA B ES 2

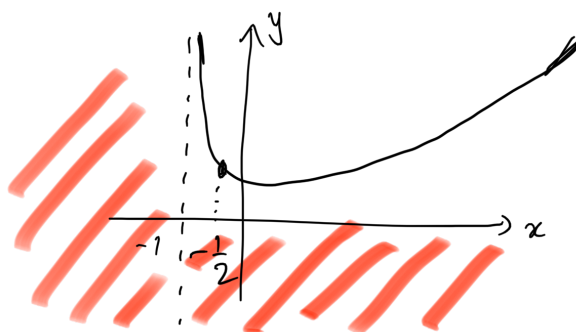
$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x+1}}$$

$$\text{dom}(f) = (-1, +\infty) \quad \leftarrow x+1 > 0$$

f non può essere né pari né dispari perché il denominatore non è simmetrico rispetto all'origine

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in \text{dom}(f)$$

f non ha zeri



Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{e^x}{\sqrt{x+1}} = +\infty$$

perché $\lim_{x \rightarrow -1} e^x = e^{-1} > 0$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{x+1} = 0^+$

$x = -1$ è un asintoto verticale destro

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x+1}} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} +\infty$$

f non ammette asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$

perché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x+1}}$$

$$f'(x) = \frac{e^x \sqrt{x+1} - e^x \frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} = \frac{e^x \left(\sqrt{x+1} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \right)}{(x+1)}$$

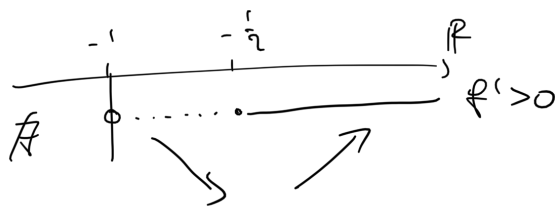
$$= \frac{e^x (2(x+1) - 1)}{2(x+1)\sqrt{x+1}} = \frac{e^x (2x+1)}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$

Calcoliamo i punti stazionari

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x (2x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x+1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$$

Studiamo il segno di f'

$$f'(x) > 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad 2x+1 > 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x > -\frac{1}{2}$$



$x = -\frac{1}{2}$ è punto di minimo assoluto

$$f(-\frac{1}{2}) = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{-\frac{1}{2}+1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

Traccia B ES S

a) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 2y' + y = x e^x$$

b) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = x e^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Svolgimento

a) Cominciamo col determinare la soluzione generale di $y'' - 2y' + y = 0$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

$\lambda = 1$ è radice di molteplicità 2 del polinomio caratteristico

$$y_0(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x \quad \begin{array}{l} \text{soluzione generale} \\ \text{dell'equazione omogenea} \end{array}$$

Determiniamo una soluzione particolare dell'equazione differenziale $\bar{y}$ con il metodo di similitudine

$$\bar{y}(x) = x^2(Ax+B)e^x \quad \text{con } A, B \in \mathbb{R} \text{ da determinare}$$

$$\bar{y}(x) = (Ax^3 + Bx^2)e^x$$

$$\begin{aligned}\bar{y}'(x) &= (3Ax^2 + 2Bx)e^x + (Ax^3 + Bx^2)e^x \\ &= (Ax^3 + (3A+B)x^2 + 2Bx)e^x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{y}''(x) &= (3Ax^2 + 2(3A+B)x + 2B)e^x + (Ax^3 + (3A+B)x^2 + 2Bx)e^x \\ &= (Ax^3 + (6A+B)x^2 + (6A+4B)x + 2B)e^x\end{aligned}$$

$$\bar{y} \text{ \u00e9 solution de } y'' - 2y' + y = xe^x$$

$$\Leftrightarrow \bar{y}''(x) - 2\bar{y}'(x) + \bar{y}(x) = xe^x$$

$$\Leftrightarrow (Ax^3 + (6A+B)x^2 + (6A+4B)x + 2B - 2Ax^3 - (6A+2B)x^2 - 4Bx + Ax^3 + Bx^2)e^x = xe^x$$

$$\Leftrightarrow ((A-2A+A)x^3 + (6A+B-6A-2B+B)x^2 + (6A+4B-4B)x + 2B)e^x = xe^x$$

$$\Leftrightarrow (6Ax + 2B)e^x = xe^x \quad \Leftrightarrow 6Ax + 2B = x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6A=1 \\ 2B=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{6} \\ B=0 \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = \frac{x^3}{6}e^x \quad \text{solution particuli\u00e8re de l'equation non homog\u00e8ne}$$

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{x^3}{6}e^x \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$b) \quad y'(x) = C_1 e^x + C_2 (1+x)e^x + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)e^x$$

$$y(0) = C_1$$

$$y'(0) = C_1 + C_2$$

$$\text{Imposons } \begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_1+C_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=0 \end{cases}$$

$$y(x) = e^x + \frac{x^3}{6}e^x \quad \text{est la solution du probl\u00e8me de Cauchy consid\u00e9r\u00e9}$$

Traccia B es 4

- a) Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{4x+5}{x^2+3x+2} dx$
- b) Calcolare l'integrale definito $\int_0^{\ln 2} \frac{4e^x + 5e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} dx$

Svolgimento

- a) Calcoliamo il delta del denominatore

$$\Delta = 3^2 - 1 \cdot 2 \cdot 4 = 1 \quad x_{1/2} = \frac{-3 \pm 1}{2} < \begin{matrix} -2 \\ -1 \end{matrix}$$

$$x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x+1)$$

Determiniamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{aligned} \frac{4x+5}{x^2+3x+2} &= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x+2)}{(x+2)(x+1)} \\ &= \frac{(A+B)x + A+2B}{x^2+3x+2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A+B=4 \\ A+2B=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=4-B=3 \\ B=1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{4x+5}{x^2+3x+2} dx &= \int \left(\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= 3 \ln|x+2| + \ln|x+1| + C \end{aligned}$$

b) $\int_0^{\ln 2} \frac{4e^x + 5e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} dx = \int_1^2 \frac{4t^2 + 5t}{t^2 + 3t + 2} \cdot \frac{1}{t} dt = \int_1^2 \frac{4t+5}{t^2+3t+2} dt$

$t = e^x \Leftrightarrow x = \ln t$
 $dx = \frac{1}{t} dt$

$x=0 \Rightarrow t=e^0=1$
 $x=\ln 2 \Rightarrow t=e^{\ln 2}=2$

$$= \left[3 \ln |t+2| + \ln |t+1| \right]_1^2$$

$$= 3 \ln 4 + \ln 3 - 3 \ln 3 - \ln 2$$

$$= 5 \ln 2 - 2 \ln 3$$

Traccia C es 4

a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{8x+5}{4x^2+4x+10} dx$$

b) Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^4 \frac{8\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}(4x+4\sqrt{x}+10)} dx$$

sviluppiamo

$$a) \Delta = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 10 < 0$$

$$\begin{aligned} 4x^2+4x+10 &= 4x^2+4x+1+9 = (2x+1)^2+9 = 9 \left[\frac{1}{9}(2x+1)^2+1 \right] \\ &= 9 \left[\left(\frac{2x+1}{3} \right)^2+1 \right] \end{aligned}$$

$$\frac{8x+5}{4x^2+4x+10} = \frac{A(8x+4) + B}{4x^2+4x+10} = \frac{8Ax + 4A + B}{4x^2+4x+10}$$

$$\begin{cases} 8 = 8A \\ 5 = 4A + B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{8x+5}{4x^2+4x+10} dx &= \int \left(\frac{8x+4}{4x^2+4x+10} + \frac{1}{4x^2+4x+10} \right) dx \\ &= \ln(4x^2+4x+10) + \int \frac{1}{9 \left[\left(\frac{2x+1}{3} \right)^2+1 \right]} dx \\ &= \ln(4x^2+4x+10) + \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2} \int \frac{\frac{2}{3}}{\left(\frac{2x+1}{3} \right)^2+1} dx \\ &= \ln(4x^2+4x+10) + \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x+1}{3} \right) + C \end{aligned}$$

$$b) \int_1^4 \frac{2\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x}(4x + 4\sqrt{x} + 10)} dx \stackrel{f}{=} \int_1^2 \frac{2t + 5}{2(4t^2 + 4t + 10)} dt$$

$$t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \\ \Rightarrow dx = 2t dt$$

$$x = 4 \Rightarrow t = 2$$

$$x = 1 \Rightarrow t = 1$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{2t + 5}{4t^2 + 4t + 10} dt = \frac{1}{2} \left[\ln(4t^2 + 4t + 10) + \frac{1}{6} \arctan\left(\frac{2t+1}{3}\right) \right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2} \left[\ln(34) + \frac{1}{6} \arctan\left(\frac{5}{3}\right) - \ln(18) - \frac{1}{6} \cdot \frac{\pi}{4} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{17}{9}\right) + \frac{1}{12} \left(\arctan\left(\frac{5}{3}\right) - \frac{\pi}{4} \right)$$

Problema C ES 5

$$a) y'' + 4y = x^2 - 1$$

$$b) \begin{cases} y'' + 4y = x^2 - 1 \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento:

a) Determiniamo la soluzione generale di $y'' + 4y = 0$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 4 \quad \lambda = \pm 2i$$

$$y_0(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$\bar{y}(x) = Ax^2 + Bx + C \quad A, B, C \in \mathbb{R} \text{ da determinare}$$

$$\bar{y}'(x) = 2Ax + B$$

$$\bar{y}''(x) = 2A$$

$$\bar{y} \text{ è soluzione di } y'' + 4y = x^2 - 1 \Leftrightarrow \bar{y}''(x) + 4\bar{y}(x) = x^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow 2A + 4(Ax^2 + Bx + C) = x^2 - 1 \Leftrightarrow 4Ax^2 + 4Bx + (2A + 4C) = x^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4A = 1 \\ 4B = 0 \\ 2A + 4C = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = 0 \\ 4C = -2A - 1 = -\frac{3}{2} \Rightarrow C = -\frac{3}{8} \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{3}{8}$$

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \frac{x^2}{4} - \frac{3}{8} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$b) \quad y'(x) = -2c_1 \sin(2x) + 2c_2 \cos(2x) + \frac{x}{2}$$

Imponiamo che

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 - \frac{3}{8} = 0 \\ 2c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{3}{8} \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

$$y(x) = \frac{3}{8} \cos(2x) + \frac{x^2}{4} - \frac{3}{8} \quad \text{è la soluzione del problema di Cauchy}$$