LEZIONE 9

mercoledì 19 ottobre 2022 19:36

Funzioni

- Definizione di funzione ed esempi
- Dominio, codominio e immagine.
- Funzioni iniettive, suriettive, biettive.
- Funzioni monotone crescenti/decrescenti (strettamente o no)
- Composizione di funzioni
- Funzioni inverse di funzioni biettive
- Funzioni simmetriche (pari / dispari)
- Funzioni limitate
- Funzioni periodiche

Nota: Per funzioni reali di variabile reale spesso si scrive l'espressione di $f(x)$ senza specificare dominio e codominio.

In tal caso si intende che:

- $\mathrm{Dom}(f)$ è il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ in cui f è definita (DOMINIO NATURALE di f o CAMPO DI ESISTENZA)
- $\mathrm{Codom}(f) = \mathbb{R}$

ESEMPI

1) $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x(x+1) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0,-1\}$$
$$= (-\infty,-1) \cup (-1,0) \cup (0,+\infty)$$

2) $f(x) = \sqrt{2x-3}$

$$\mathrm{Dom}(f) = \left[\tfrac{3}{2}, +\infty\right)$$

C.E.

$2x - 3 \geq 0$

$x \geq \frac{3}{2}$

3) $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{x+1}{2x+1}}$

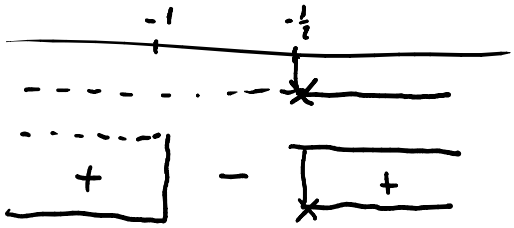
c.e.

$2x+1 \neq 0$

$\dfrac{x+1}{2x+1} \geq 0$

$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \vee x > -\frac{1}{2}\}$

$= (-\infty, -1] \cup (-\frac{1}{2}, +\infty)$



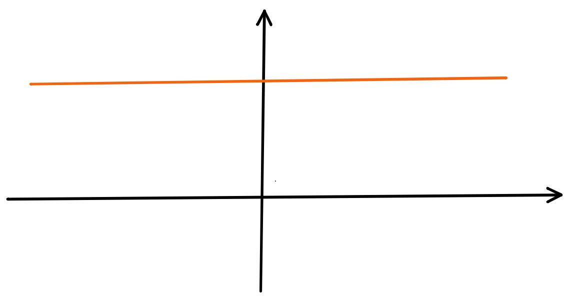
Regole principali:

- I denominatori delle frazioni devono essere $\neq 0$.
- L'argomento delle radici n-sime con n pari deve essere ≥ 0
- L'argomento dei logaritmi deve essere > 0

FUNZIONI ELEMENTARI

1) FUNZIONI COSTANTI:

$f(x) = c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$



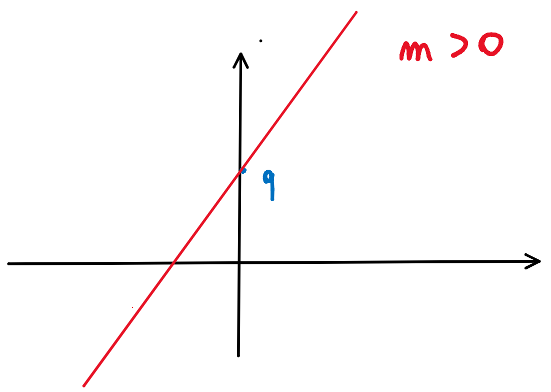
- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- $\text{Im}(f) = \{c\}$
- Sono sia funzioni crescenti che decrescenti
- Sono pari:
  $f(x) = f(-x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) FUNZIONI AFFINI

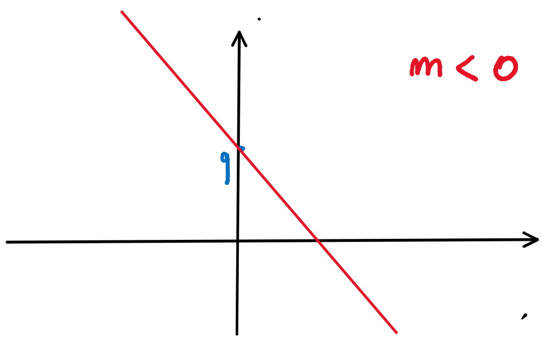
$f(x) = mx + q \quad \text{con } m, q \in \mathbb{R}$

> Nota: Nel caso $q = 0$ si dicono FUNZIONI LINEARI

$m > 0$



$m < 0$

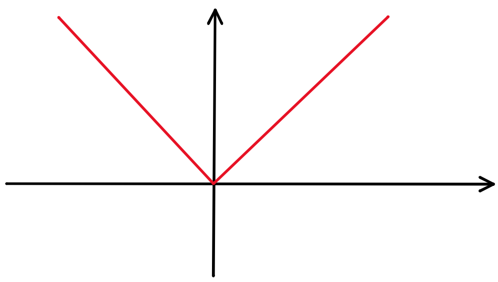


- Se $m = 0$ sono funzioni costanti
- Se $m \neq 0$:
- $Dom(f) = \mathbb{R}$
- $Im(f) = \mathbb{R}$
- f è biettiva (e $f^{-1}(x) = \frac{x}{m} - \frac{q}{m}$)
- f è monotone strettamente : crescente se m
  decrescente $m < 0$

- Se $q \neq 0$ non è pari né dispari
  Se $q = 0$ è dispari
  $(f(-x) = m(-x) = -mx = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R})$

3) VALORE ASSOLUTO

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & se \ x \geq 0 \\ -x & se \ x < 0 \end{cases}$$



- $Dom(f) = \mathbb{R}$
- $Im(f) = [0, +\infty)$
- f non è iniettiva .
- f è pari
  $|-x| = |x|$

- f non è monotona in $\mathbb{R}$ ma :
  f è strettamente crescente in $[0, +\infty)$
  f è strettamente decrescente in $(-\infty, 0]$

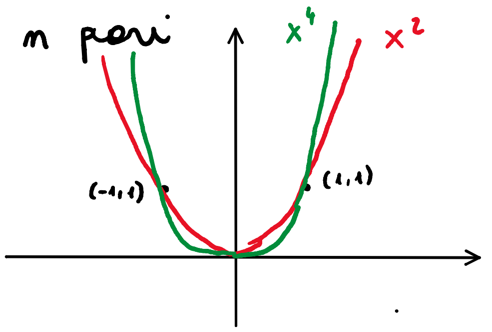
4) POTENZE NATURALI

$$f(x) = x^n \quad con \quad n \in \mathbb{N}$$

- se $n = 0$ funzione costante
- se $n = 1$ funzione affine (lineare)

Ci interessa il caso $n \geq 2$:

- n pari



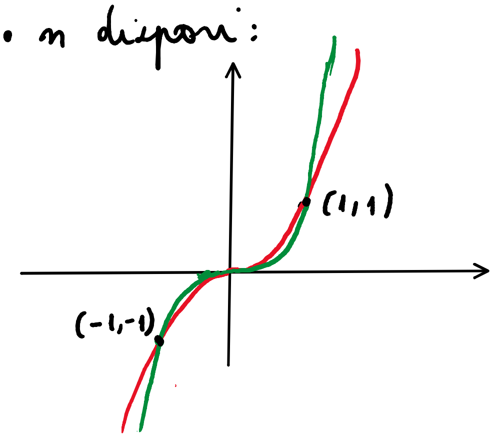
- $Dom(f) = \mathbb{R}$
- $Im(f) = [0,+\infty)$
- f non è iniettiva
- f non è monotona
  (è crescente in $[0,+\infty)$ e decrescente in $]-\infty,0]$)
- f è pari
- f non può essere invertita su tutto $\mathbb{R}$ ma

$$\tilde{f}: [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$$
$$x \longmapsto x^n$$

è invertibile e

$$\tilde{f}^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$$

- n dispari:



- $Dom(f) = \mathbb{R}$
- $Im(f) = \mathbb{R}$
- f è biettiva
- f è monotona strettamente crescente
- f è dispari
- f è biettiva e

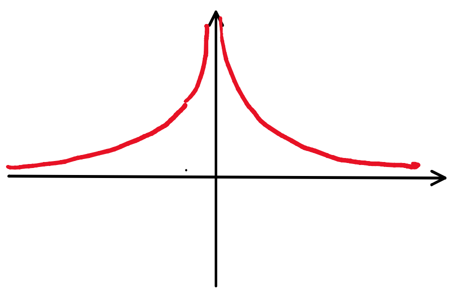
$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$$

n dispari:
$x^n = y$
$x = \sqrt[n]{y}$

5) POTENZE INTERE NEGATIVE

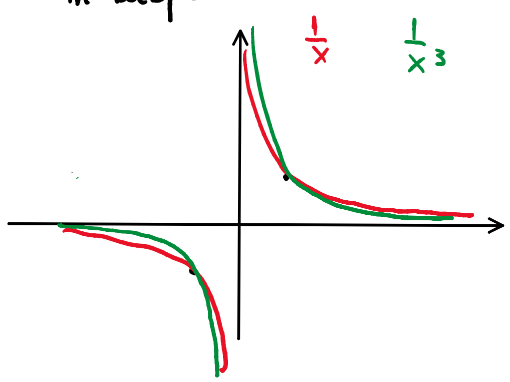
$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \text{con } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

n pari:



- $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $Im(f) = (0,+\infty)$
- f è pari

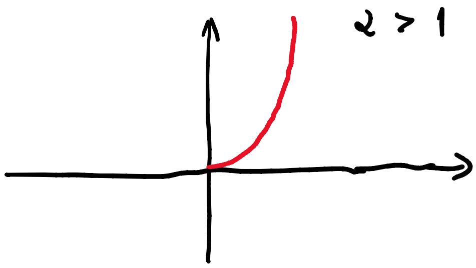
n dispari

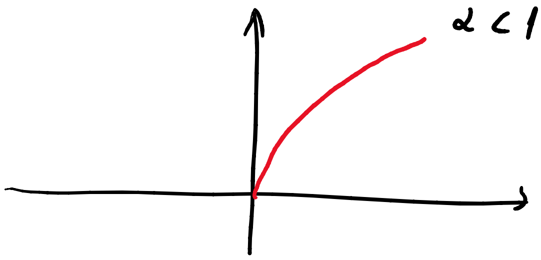


- $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $Im(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- f è dispari

6) POTENZE REALI POSITIVE

$f(x) = x^{\alpha}$ con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\alpha > 0$



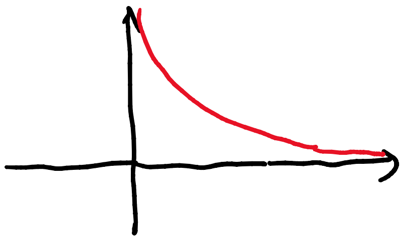


- $\mathrm{Dom}(f) = [0, +\infty)$
- $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$
- f è strettamente monotona.
- Come funzione da $[0,+\infty)$ a $[0,+\infty)$ è biettiva e $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{\alpha}}$

$$\boxed{\begin{aligned} x^{\alpha} &= y \\ x &= y^{\frac{1}{\alpha}} \end{aligned}}$$

7) POTENZE REALI NEGATIVE

$f(x) = x^{\alpha}$ con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\alpha < 0$



$\mathrm{Dom}(f) = (0, +\infty)$

$\mathrm{Im}(f) = (0, +\infty)$

f è strettamente monotona decrescente

f è biettiva (da $(0,+\infty)$ in $(0,+\infty)$)

è $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{\alpha}}$

Più in generale possiamo disegnare il grafico di $\sqrt[m]{x^n}$

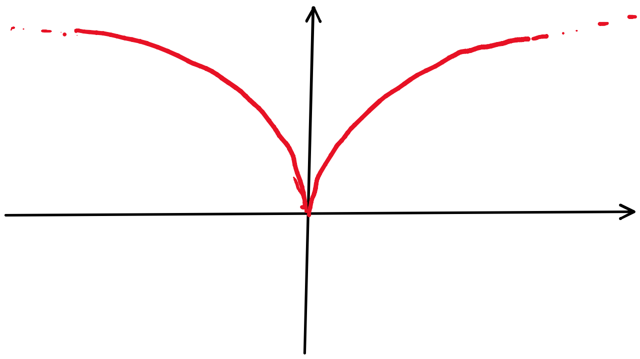
ESEMPIO

$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ se $x \geq 0$

f è pari



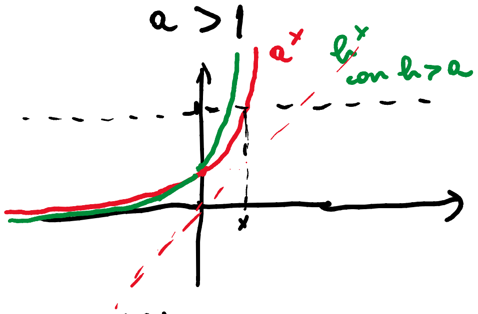
---

8) ESPONENZIALI

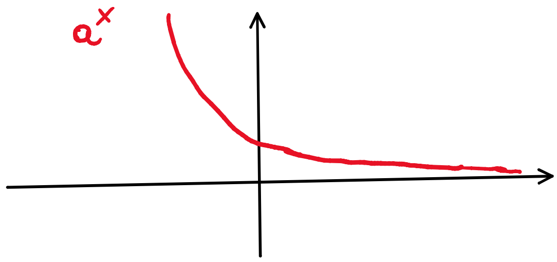
Dato $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$: $f(x) = a^x$.

- Se $a = 1$, $f(x) = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$: funzione costante.
- Se $a \neq 1$:

$a > 1$



$0 < a < 1$



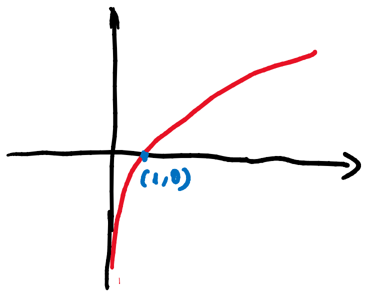
$$\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}}$$

- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- $\mathrm{Im}(f) = (0, +\infty)$
- f è biettiva da $\mathbb{R}$ a $(0, +\infty)$ e $f^{-1}(x) = \log_a x$
- f è strettamente monotona (crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$).

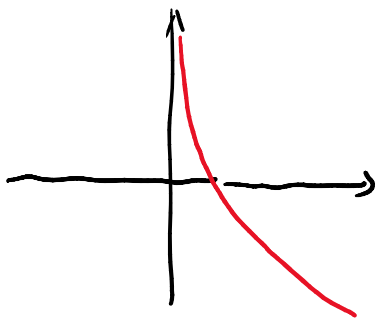
9) LOGARITMI

$f(x) = \log_a x$ con $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

$a > 1$:



$0 < a < 1$

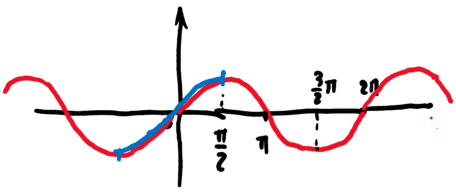


- $\mathrm{Dom}(f) = (0, +\infty)$
- $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$
- f è strettamente monotona (crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$)
- f è biettiva da $(0, +\infty)$ in $\mathbb{R}$ e si ha $f^{-1}(x) = a^x$.

---

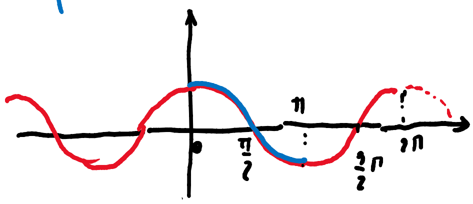
10) FUNZIONI TRIGONOMETRICHE (O GONIOMETRICHE)

$f(x) = \sin x$ (SENO)



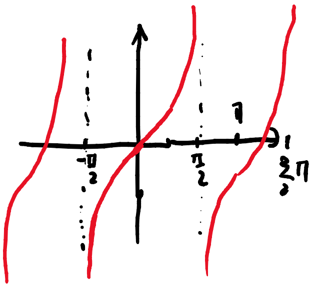
- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- $\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$
- f è dispari
- f è limitata
- $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ è biettiva e la sua funzione inversa è $f^{-1}(x) = \arcsin x$

$f(x) = \cos x$ (COSENO)



- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- $\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$
- f è pari
- f è limitata
- $f: [0, \pi] \to [-1, 1]$ è biettiva e la sua inversa è la funzione $\arccos x$

$f(x) = \tan x = tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$ (TANGENTE)



- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
- $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$
- f è dispari
- $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ è biettiva e la sua inversa è $\mathrm{arctg}\, x$.

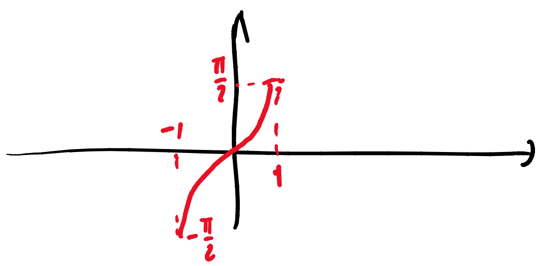
---

11) INVERSE DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE

ARCOSENO

$f(x) = \arcsin x$

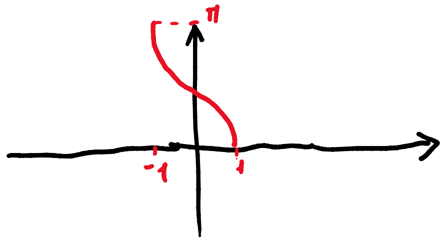
- $\mathrm{Dom}(f) = [-1, 1]$
- $\mathrm{Im}(f) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- è dispari
- è strettamente crescente.



ARCO COSENO

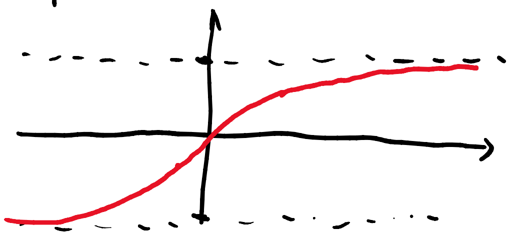
$f(x) = \arccos x$

- $\mathrm{Dom}(f) = [-1, 1]$
- $\mathrm{Im}(f) = [0, \pi]$
- f è strettamente decrescente



ARCOTANGENTE

$f(x) = \arctan x$



- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- $\mathrm{Im}(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- f è dispari
- f è strettamente crescente
- f è limitata.

TRASFORMAZIONI ELEMENTARI DEI GRAFICI

Sia $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}$ una funzione.

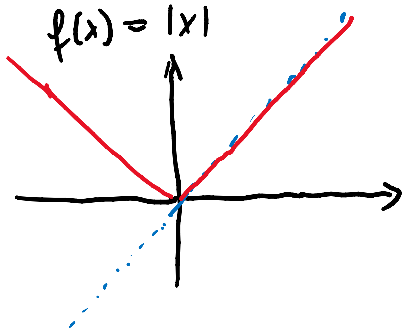
1) VALORE ASSOLUTO DI $f(x)$

$$g(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

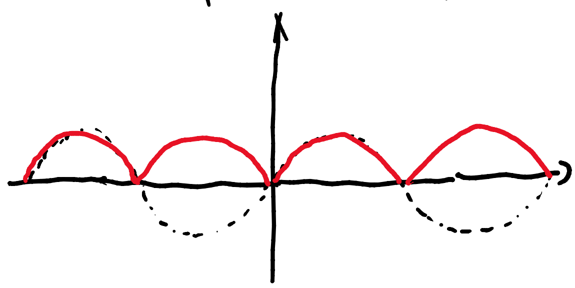
Il grafico di $|f(x)|$ si ottiene da quello di f ribaltando rispetto all'asse x le porzioni del grafico in cui f è negativa

ESEMPI

$f(x) = |x|$



$f(x) = |\sin x|$

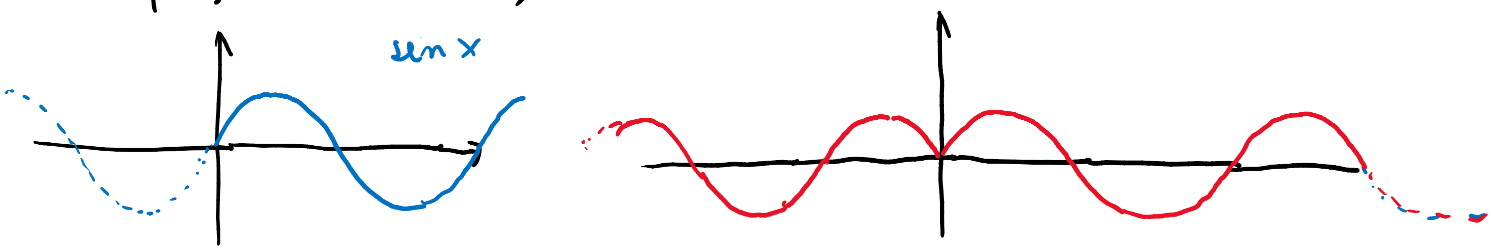


2) $f(|x|)$ (COMPOSIZIONE INTERNA CON IL VALORE ASSOLUTO)

$$f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$f(|x|)$ è sempre una funzione pari.
Il grafico di $f(|x|)$ si ottiene disegnando il grafico di $f(x)$ per $x \geq 0$ e poi estendendo per simmetria rispetto all'asse y.

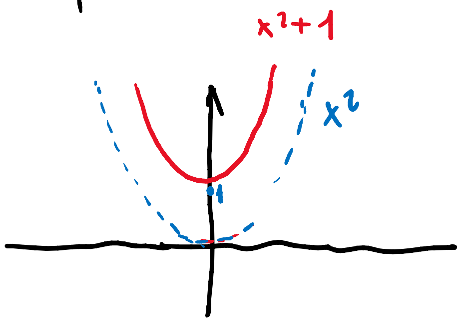
$f(x) = \operatorname{sen}(|x|)$



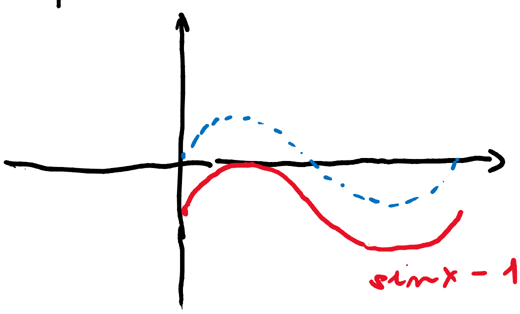
3) TRASLAZIONI VERTICALI

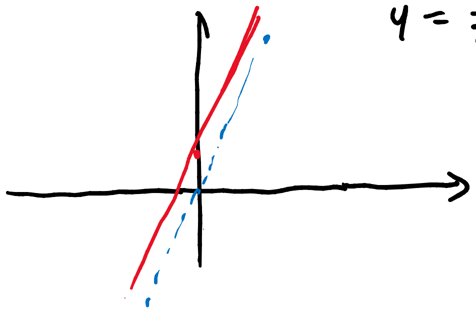
Dato $c \in \mathbb{R}$ consideriamo $g(x) = f(x) + c$.
Il grafico di $g(x)$ si ottiene traslando verticalmente di c il grafico di f

$f(x) = x^2 + 1$



$f(x) = \operatorname{sen} x - 1$





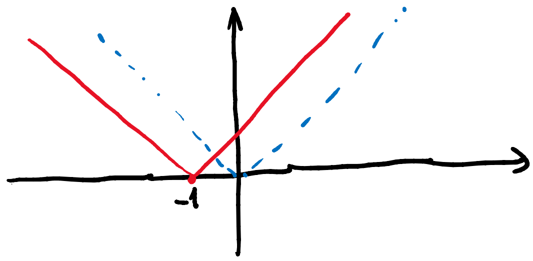
$y = 3x + 1$

4) TRASLAZIONI ORIZZONTALI

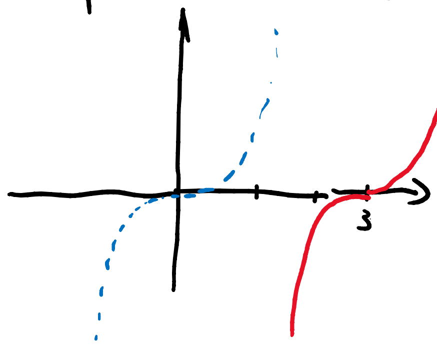
Dato $c \in \mathbb{R}$ consideriamo $g(x) = f(x + c)$

Il grafico di $g(x)$ si ottiene traslando orizzontalmente il grafico di f di $-c$

$f(x) = |x + 1|$



$f(x) = (x-3)^3$



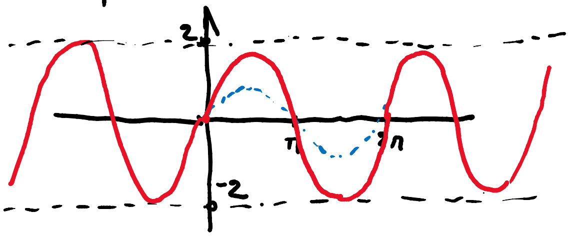
5) DILATAZIONI VERTICALI (O RISCALAMENTI VERTICALI)

Dato $A \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$ consideriamo $g(x) = A\, f(x)$

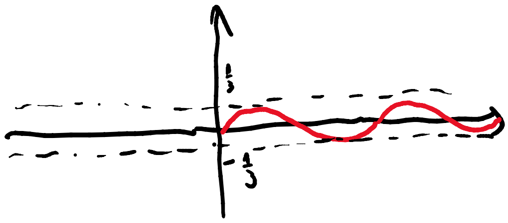
- Se $A > 1$ il grafico di g si ottiene dilatando il grafico di f verticalmente di un fattore A.
- Se $0 < A < 1$ il grafico di g è una compressione verticale del grafico di f
- Se $A < 0$ il grafico di g si ottiene ribaltando il grafico di f rispetto all'asse x e poi moltiplicando per A.

ESEMPI

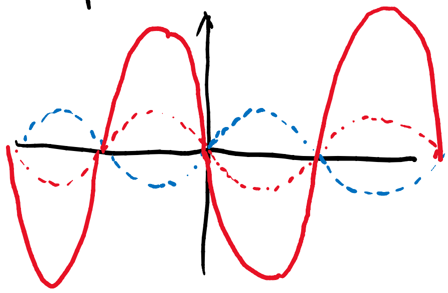
$f(x) = 2 \sin x$



$f(x) = \frac{1}{3} \sin x$



$f(x) = -3 \sin x$



(prima si ribalta, poi si moltiplica per 3)

DILATAZIONI ORIZZONTALI (O RISCALAMENTI VERTICALI)

Dato $A \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$, $g(x) = f(Ax)$

- Se $A > 1$ è una compressione orizzontale
- Se $0 < A < 1$ è una dilatazione orizzontale
- Se $A < 0$ prima si ribalta il grafico rispetto all'asse y e poi si riscala di $|A|$
