LEZIONE 6

lunedì 17 ottobre 2022 09:02

FUNZIONI

- Def: Siano X, Y due insiemi, una FUNZIONE DI DOMINIO X E CODOMINIO Y è una legge che ad ogni elemento di X associa un elemento di Y (uno solo).

Notazioni:

- Indicheremo le funzioni di dominio X e codominio Y con la notazione: $f : X \to Y$
- X si dice DOMINIO di f e si indica con $X = Dom(f)$. (su alcuni libri è chiamato campo di esistenza)
- Y si dice CODOMINIO di f e si indica con $Y = Codom(f)$.
- Se $f : X \to Y$ è una funzione, $\forall x \in X \ \exists! y \in Y$ che corrisponde ad x tramite f. Tale y si indica con $f(x)$ (e si chiama VALORE DI f in x)
- $f : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ oppure $f : X \to Y$, $f(x) = \dots$

ESEMPI

1) $X = \{$studenti immatricolati UNIBA$\}$

$Y = \mathbb{N}$

$f : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & \text{n. di matricola.} \end{array}$

2) $X = \{a, e, i, o, u\}$

$Y = \{1, 2, 3\}$

$$
\begin{aligned}
f : X &\longrightarrow Y \\
a &\longmapsto 1 \\
e &\longmapsto 3 \\
i &\longmapsto 1 \\
o &\longrightarrow 2 \\
u &\longmapsto 1
\end{aligned}
$$

3) $$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2$$

$$f(1) = 1^2 = 1$$
$$f(2) = 2^2 = 4$$
$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$
$$f\left(-\tfrac{7}{4}\right) = \frac{49}{16}.$$

Def: Sia $f : X \longrightarrow Y$ una funzione, X, Y insiemi.
Si definisce IMMAGINE DI f l'insieme
$$f(X) := \{ f(x) : x \in X \}.$$ (si indica anche con $\mathrm{Im}(f)$)

- Più in generale: dato un insieme $A \subseteq X$, definiamo
$$f(A) := \{ f(x) : x \in A \}$$
($f(A)$: IMMAGINE DI A TRAMITE f)

ESEMPI

1) $$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow x^2$$

$$f(\mathbb{R}) = \{ x^2 : x \in \mathbb{R} \} = [0, +\infty)$$
$$f([1,2]) = \{ x^2 : x \in [1,2] \} = [1, 4]$$

$f([-3,-1]) = [1, 9]$

$f([-1, 4]) = [0, 16]$

$f((1, 10]) = (1, 100]$

$f((-1, 4)) = [0, 16)$

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x+1$

$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. ($\forall y \in \mathbb{R}$ prendendo $x = y-1$ si ha che $y = y-1+1 = f(y-1) = f(x)$)

$f([2, 3]) = [3, 4]$.

OSS: Sia $f: X \to Y$ una funzione.

$f(X) = \{ y \in Y \mid \exists x \in X \text{ t.c. } f(x) = y \}$

stiamo dicendo che, se consideriamo l'equazione $f(x) = y$ possiamo interpretare $f(X)$ come l'insieme dei valori di Y per cui l'equazione ha soluzione in X.

Def: Sia $f: X \longrightarrow Y$ una funzione.

- Si dice che f è INIETTIVA (o INGETTIVA) se $\forall x_1, x_2 \in X: \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$

(equivalentemente: $\forall x_1, x_2 \in X: x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$)

- Si dice che f è SURIETTIVA (o SURGETTIVA) se $f(X) = Y$

• Si dice che f è BIETTIVA (o BIGETTIVA) se è sia iniettiva che suriettiva.

OSS Sia $f: X \to Y$. Allora:

• f è suriettiva $\iff \forall y \in Y \ \exists x \in X$ t.c. $f(x) = y$.
• f è iniettiva $\iff \forall y \in Y$ l'equazione $f(x) = y$ ha al più una soluzione
• f è biettiva $\iff \forall y \in Y \ \exists! \ x \in X$ tale che $f(x) = y$.

ESEMPI

1) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}$.

$\forall y \in \mathbb{R}$ l'equazione $x+1 = y$ ha per unica soluzione $x = y-1$ quindi f è biettiva.

2) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & x^2 \end{array}$

• f è iniettiva? NO Ad esempio:

$f(1) = 1$ e $f(-1) = 1$.

(anche $f(2) = 4$ e $f(-2) = 4$)

(In altri termini, possiamo dire che l'equazione $f(x) = 1$ ha due soluzioni $x = 1$ e $x = -1$)

• è suriettiva? NO.

$f(\mathbb{R}) = [0, +\infty) \neq \mathbb{R}$

In altri termini: ci sono degli $y \in \mathbb{R}$ per cui $x^2 = y$ non ha soluzioni ($y < 0$)

3) $f: \mathbb{R} \longrightarrow [0,+\infty)$
$x \longmapsto x^2$

- è suriettiva infatti: $\forall y \in [0,+\infty)$ l'equazione $x^2 = y$ ha soluzione

(In generale $f: X \to f(X)$ è suriettiva)

- è iniettiva? NO
perché l'equazione $x^2 = y$ ha due soluzioni se $y > 0$.

4) $f: [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$
$x \longmapsto x^2$

è biettiva, infatti

$\forall y \in [0,+\infty)$, l'equazione $x^2 = y$
ha due soluzioni reali $x = \sqrt{y}$ e $x = -\sqrt{y}$ ma solo $\sqrt{y} \in [0,+\infty)$

Possiamo dire che $x^2 = y$ una sola soluzione in $[0,+\infty)$.

5) $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x+1$.

- $f(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{0\} \neq \mathbb{R}$.
$x+1 = y$ ha per soluzione $x = y-1$.
Ma se $y \notin \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si ha $y-1 \notin \mathbb{N}$
Quindi in questi casi l'equazione $x+1 = y$
non ha soluzioni in $\mathbb{R}$.
- f è suriettiva.

Def: Sia $f: X \longrightarrow Y$ una funzione. Definiamo **GRAFICO** di f l'insieme
$\mathcal{G}(f) := \{ (x, f(x)) : x \in X \}$.

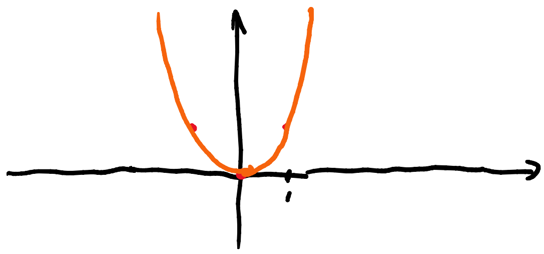
(è un sottoinsieme di $X \times Y$)

Def: Una FUNZIONE REALE DI VARIABILE REALE è una funzione $f: X \to Y$ con $X, Y \subseteq \mathbb{R}$.

Il grafico di queste funzioni è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$:

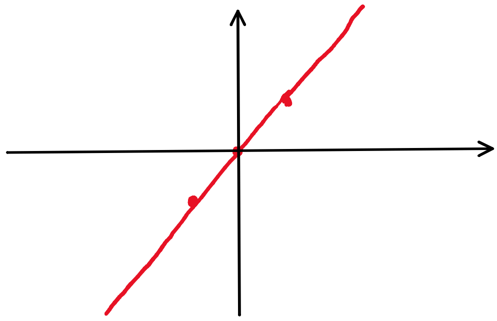
ESEMPI

1) $f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow x^2 \end{array}$



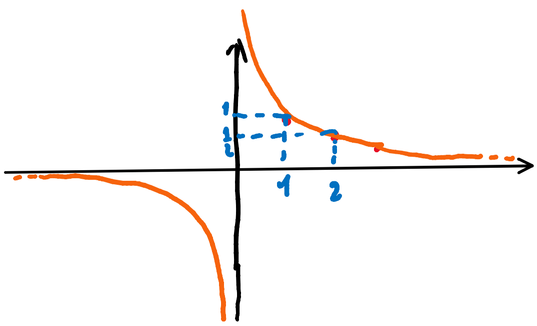
$f(0) = 0$
$f(1) = 1$
$f(-1) = -1$
$\vdots$

2) $f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow x+1 \end{array}$



$f(0) = 1$
$f(1) = 2$
$\vdots$

3) $f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \end{array}$

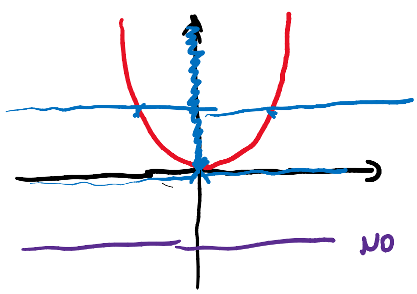


$f(1) = 1$
$f(2) = \frac{1}{2}$
$f(-1) = 1$
$f(-2) = -\frac{1}{2}$

Sia $f: X \to Y$ con $X, Y \subseteq \mathbb{R}$.
Dal grafico di f possiamo visualizzare l'immagine di f e stabilire se f è iniettiva / suriettiva / biettiva.

ESEMPIO

$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow x^2 \end{array}$



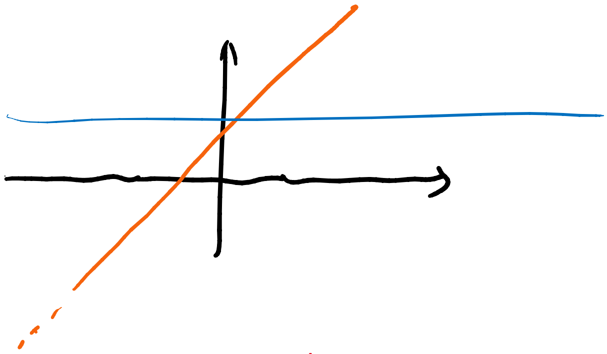
$f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$

NO INTERSEZIONI

- $f(\mathbb{R})$ è l'insieme degli y per cui tracciando una retta orizzontale ad altezza y si interseca il grafico.
- f è suriettiva se $\forall y \in Y$, tracciando una retta orizzontale ad altezza y intersechiamo il grafico di f.
- f è iniettiva se $\forall y \in Y$, tracciando una retta orizzontale ad altezza y intersechiamo il grafico al massimo una volta
- f è biettiva se $\forall y \in Y$, tracciando una retta orizzontale ad altezza y troviamo esattamente una intersezione con il grafico di f.

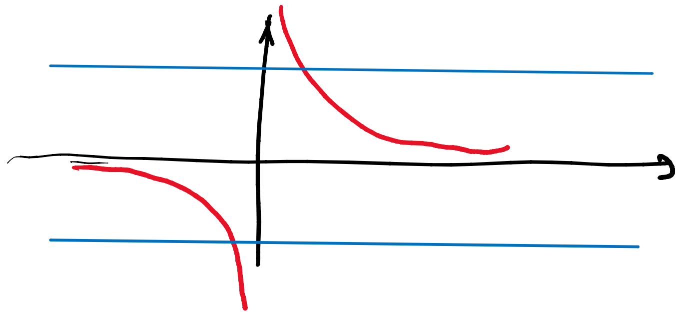
ESEMPI

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto x+1$



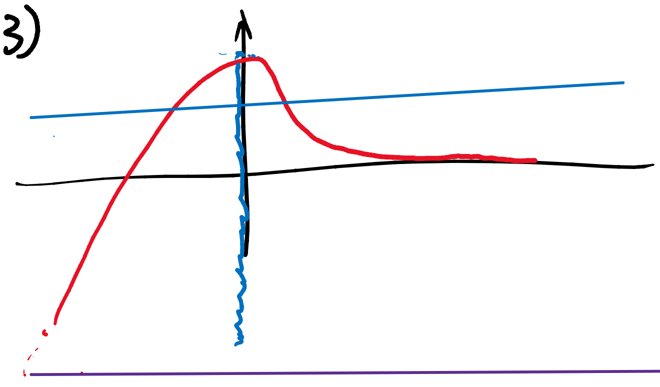
f è biettiva

2) $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{x}$



f è iniettiva ma non suriettiva
e $f(\mathbb{R}\setminus\{0\}) = \mathbb{R}\setminus\{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

3)

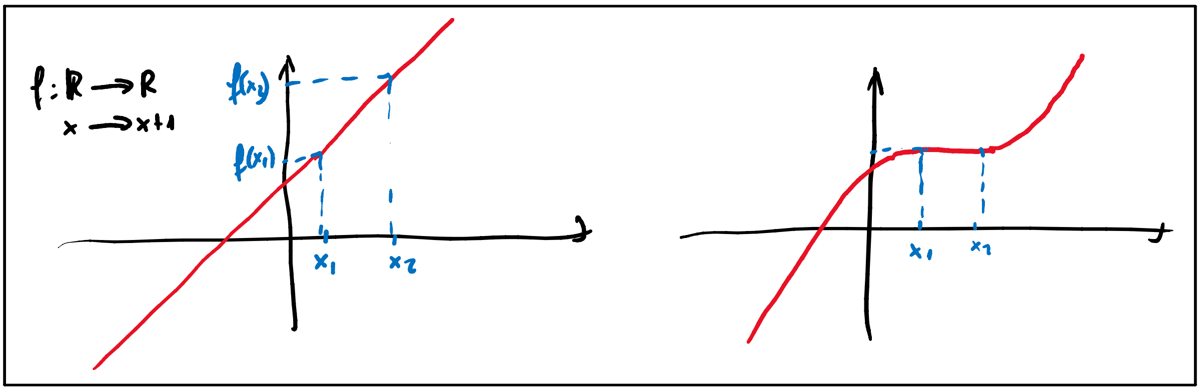


$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
non è suriettiva né iniettiva.

FUNZIONI MONOTONE

Def: Sia $f: X \to Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ (funzione reale di variabile reale)

- Si dice che f è MONOTONA CRESCENTE se
$\forall x_1, x_2 \in X : \quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$



- Si dice che f è MONOTONA DECRESCENTE se
$\forall x_1, x_2 \in X : \quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$

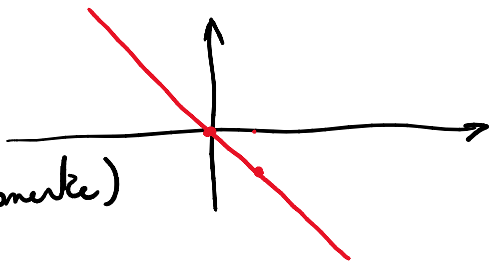
- Si dice che f è STRETTAMENTE MONOTONA CRESCENTE se
$\forall x_1, x_2 \in X : \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

- Si dice che f è STRETTAMENTE MONOTONA DECRESCENTE
se $\forall x_1, x_2 \in X : \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

Più in generale se $A \subseteq X$, si dice che f è:
- MONOTONA CRESCENTE IN A se $\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- MONOTONA DECRESCENTE IN A se $\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$
- STRETTAMENTE MONOTONA CRESCENTE IN A se $\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- STRETTAMENTE MONOTONA DECRESCENTE IN A se $\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

ESEMPI

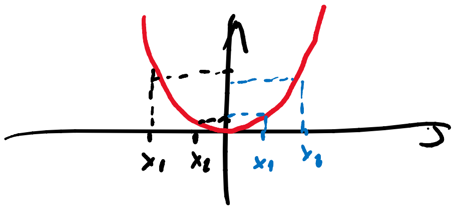
1) $f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -x \end{array}$



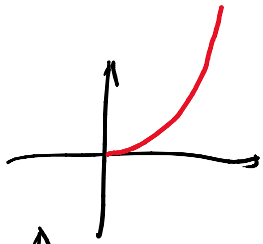
è monotona (strettamente) decrescente.

2) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

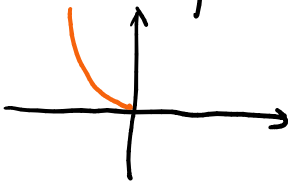
$\quad x \longmapsto x^2$



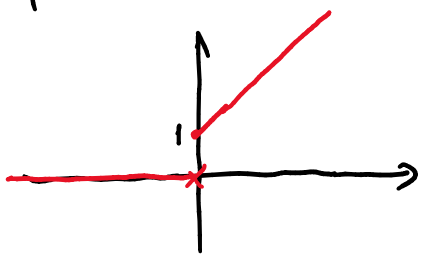
- f non è monotona in $\mathbb{R}$.
- f è monotona crescente in $[0, +\infty)$ (strettamente)



- f è monotona (strettamente) decrescente in $(-\infty, 0]$



3) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x+1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$



f è monotona crescente (in $\mathbb{R}$) ma non strettamente.

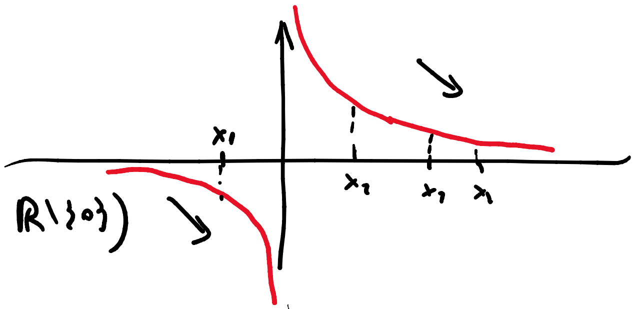
$\mathrm{Im}(f) = [1, +\infty) \cup \{0\}$

f non è iniettiva (ad esempio $f(-2) = 0 = f(-1)$)

4) $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\quad x \longmapsto \frac{1}{x}$

è monotona? (in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$)



NO

però è monotona strettamente decrescente in $(0, +\infty)$ e in $(-\infty, 0)$

OSS

Se $f: X \longrightarrow Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ è strettamente monotona (crescente o decrescente) allora f è iniettiva.

COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

Def: Siano X, Y, Z tre insiemi e siano $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$. Si definisce COMPOSIZIONE DI f E g la funzione $g \circ f: \begin{array}{l} X \longrightarrow Z \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{array}$

Si noti che nella definizione $\text{Codom}(f) = Y = \text{Dom}(g)$.

Più in generale, date $f: X \to Y$, $g: \tilde{Y} \longrightarrow Z$ se $f(X) \subseteq \tilde{Y}$ $(f(X) \subseteq \text{Dom}(g))$ allora si può definire $g \circ f$ come sopra.

ESEMPIO

$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \end{array}$ $\qquad g: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 3x^2+1 \end{array}$

$\text{Codom}(f) = \text{Dom}(g)$ quindi definiamo

$$g \circ f: \begin{array}{l} \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow 3\left(\frac{1}{x}\right)^2+1 = \frac{3}{x^2}+1. \end{array}$$

Attenzione: L'ordine in cui scriviamo f e g è importante: $f \circ g \neq g \circ f$.

$g: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow 3x^2+1 \end{array}$ $\qquad f: \begin{array}{l} \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \end{array}$

$g(\mathbb{R}) = [1, +\infty) \subseteq \mathbb{R}\setminus\{0\}$

quindi si può definire anche $f \circ g$:

$$f \circ g: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \frac{1}{3x^2+1} \end{array}$$

ESEMPIO

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x-3|+2 \end{array} \qquad g: \begin{array}{l} [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{array}$$

Siccome $f(\mathbb{R}) = [2,+\infty) \subseteq [0,+\infty) = \mathrm{Dom}(g)$.
posso definire la composizione.

$$g \circ f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{|x-3|+2} \end{array}$$

ESEMPIO

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x+1 \end{array} \quad e \quad g: \begin{array}{l} \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \end{array}$$

$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \not\subseteq \mathbb{R}\setminus\{0\}$ quindi non posso definire la composizione su $\mathbb{R}$.

Posso modificare il dominio di f:

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}\setminus\{-1\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x+1 \end{array} \qquad g: \begin{array}{l} \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \end{array}$$

$f(\mathbb{R}\setminus\{-1\}) = \mathbb{R}\setminus\{0\} \underset{(=)}{\subseteq} \mathrm{Dom}(g)$ quindi si può definire $g \circ f$

$$g \circ f: \begin{array}{l} \mathbb{R}\setminus\{-1\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \frac{1}{x+1} \end{array}.$$

FUNZIONE INVERSA

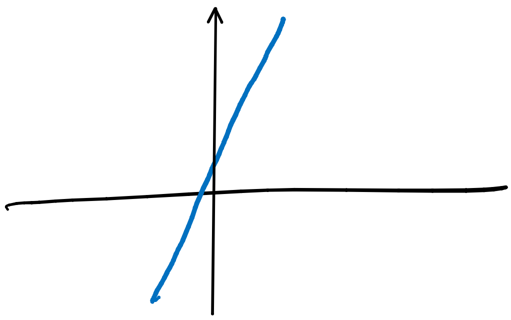
Def: Sia $f: X \to Y$ una funzione biettiva. Allora $\forall y \in Y$ $\exists!\ x \in X$ t.c. $f(x) = y$. Si dice FUNZIONE INVERSA DI f la funzione

$$f^{-1}: \begin{array}{l} Y \longrightarrow X \\ y \longmapsto \text{l'unico } x \text{ t.c. } f(x) = y. \end{array}$$

ESEMPI

1) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto 2x+1$

è biettiva? SI



$y = 2x+1$

$x = \frac{y-1}{2}$

$f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$y \longmapsto \frac{y-1}{2}$

(o posso dire $f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow \frac{x-1}{2}$)

2) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$

non è biettiva
non posso definire la funzione inversa

però:

$f: [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$
$x \longmapsto x^2$

è biettiva

Se $x, y \geq 0$ si ha: $x^2 = y \iff x = \sqrt{y}$

$f^{-1}: [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$
$y \longmapsto \sqrt{y}$

OSS Se $f: X \longrightarrow Y$ è biettiva e $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ è la sua inversa allora:

- $f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in X$
- $f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in Y$

TEOREMA

Se $f: X \longrightarrow Y$ con $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ è una funzione strettamente monotona, allora $f : X \to f(X)$ è biettiva. Inoltre $f^{-1} : f(X) \to X$ è strettamente monotona (dello stesso tipo di f).