LEZIONE 4

mercoledì 12 ottobre 2022 09:00

Equazioni e disequazioni con radici (irrazionali)

Sono equazioni / disequazioni in cui l'incognita x compare sotto un segno di radice

Tipo più semplice: $\sqrt[n]{p(x)} = q(x)$ dove p e q sono polinomi (in realtà le tecniche che vediamo oggi si applicano anche quando p e q sono funzioni qualsiasi)

- Se n è dispari:

$$\sqrt[n]{p(x)} = q(x) \iff p(x) = q(x)^n$$

In modo simile:

$$\sqrt[n]{p(x)} \geq q(x) \iff p(x) \geq q(x)^n$$
$$\sqrt[n]{p(x)} > q(x) \iff p(x) > q(x)^n$$
$$\sqrt[n]{p(x)} \leq q(x) \iff p(x) \leq q(x)^n$$
$$\sqrt[n]{p(x)} < q(x) \iff p(x) < q(x)^n$$

Se n è dispari:

$a^n = b^n \iff a = b$

$a^n \geq b^n \iff a \geq b$

$a^n > b^n \iff a > b$

$a^n \leq b^n \iff a \leq b$

$a^n < b^n \iff a < b$

ESEMPIO

- $\sqrt[3]{x^2-1} = x-1$

$$x^2-1 = (x-1)^3$$
$$x^2 \cancel{-1} = x^3-3x^2+3x \cancel{-1}$$
$$x^3-4x^2+3x = 0$$
$$x(x^2-4x+3) = 0$$
$$x = 0 \quad \vee \quad x^2-4x+3 = 0$$
$$x = 0 \quad \vee \quad x = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1 \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$
$$x = 0 \quad \vee \quad x = 3 \quad \vee \quad x = 1$$

ESEMPIO

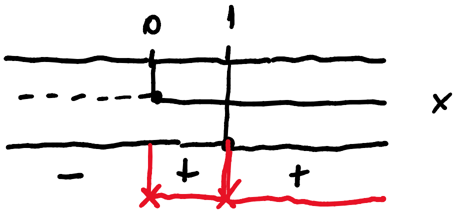
$$\sqrt[3]{2x^2 - x} < x$$

$$2x^2 - x < x^3$$

$$x^3 - 2x^2 + x > 0$$

$$x(x^2 - 2x + 1) > 0$$

$$x(x-1)^2 > 0$$



Soluzioni: $0 < x < 1 \quad \vee \quad x > 1$

L'insieme delle soluzioni è: $(0,1) \cup (1,+\infty) = (0,+\infty) \setminus \{1\}$

- Caso n pari:

$$\sqrt[n]{p(x)} = q(x)$$

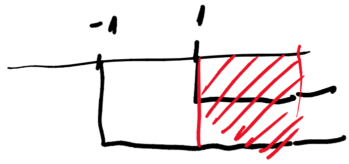
1) Condizioni di esistenza: $p(x) \geq 0$
2) Compatibilità dei segni: $q(x) \geq 0$
3) L'equazione equivale al sistema $\begin{cases} p(x) \geq 0 \\ q(x) \geq 0 \\ p(x) = q(x)^n \end{cases}$

ESEMPIO

$$\sqrt{x+1} = x - 1$$

c.e: $x + 1 \geq 0 \iff x \geq -1$

segno: $x - 1 \geq 0 \iff x \geq 1$



$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 1 \\ x+1 = (x-1)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 1 \\ x+1 = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases} \qquad x(x-3) = 0 \iff x = 0 \vee x = 3$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ \underbrace{x = 0}_{\text{NO}} \vee x = 3 \end{cases}$$

quindi $x = 3$ è l'unica soluzione.

Disequazioni nel caso n pari:

- $\sqrt[n]{p(x)} \geq q(x)$

La disequazione è equivalente a:

$$\begin{cases} p(x) \geq 0 \quad (c.e) \\ q(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} p(x) \geq 0 \\ q(x) \geq 0 \\ p(x) \geq q(x)^n \end{cases}$$

In modo simile, per la disuguaglianza stretta:

$$\sqrt[n]{p(x)} > q(x) \iff \begin{cases} p(x) \geq 0 \\ q(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} p(x) \geq 0 \\ q(x) \geq 0 \\ p(x) > q(x)^n \end{cases}$$

Attenzione: L'equivalenza è diversa per le disuguaglianze con $\leq$ o $<$:

- $\sqrt[n]{p(x)} \leq q(x) \iff \begin{cases} p(x) \geq 0 \\ q(x) \geq 0 \\ p(x) \leq q(x)^n \end{cases}$

In modo simile:

$$\sqrt[n]{p(x)} < q(x) \iff \begin{cases} p(x) \geq 0 \\ q(x) \geq 0 \\ p(x) < q(x)^n \end{cases}$$

ESEMPIO

Risolviamo: $\sqrt{2x+4} \geq x-1$

$$① \begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 2x+4 \geq (x-1)^2 \end{cases} ②$$

① $\begin{cases} x \geq -2 \\ x < 1 \end{cases}$

$-2 \leq x < 1$

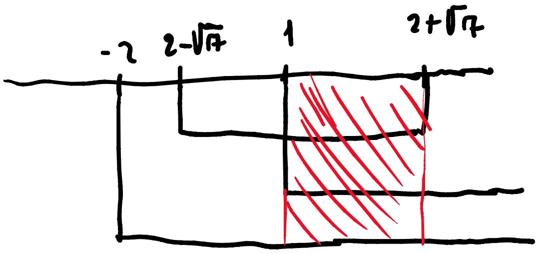
② $\begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq 1 \\ 2x + 4 \geq x^2 - 2x + 1 \end{cases}$ (*)

$x^2 - 4x - 3 \leq 0$

$\frac{\Delta}{4} = 4 + 3 = 7 > 0$

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{7}$

$2 - \sqrt{7} \leq x \leq 2 + \sqrt{7}$



$\begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq 1 \\ 2-\sqrt{7} \leq x \leq 2 + \sqrt{7} \end{cases}$

$1 \leq x \leq 2 + \sqrt{7}$

Conclusione: $-2 \leq x < 1 \quad \vee \quad 1 \leq x \leq 2 + \sqrt{7}$

cioè : $-2 \leq x \leq 2 + \sqrt{7}$

ESEMPIO

$\sqrt{x^2+1} > 3x$

c.e: $x^2 + 1 \geq 0$ vera $\forall x \in \mathbb{R}$

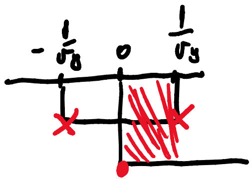
quindi la disequazione è equivalente a:

$3x < 0 \quad \vee \quad \begin{cases} 3x \geq 0 \\ x^2 + 1 > 9x^2 \end{cases}$

$x < 0$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ 8x^2 - 1 < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{8}} < x < \frac{1}{\sqrt{8}} \end{cases}$



$0 \leq x < \frac{1}{\sqrt{8}}$

Conclusione: $x < 0 \quad \vee \quad 0 \leq x < \frac{1}{\sqrt{8}}$

cioè $\quad x \leq \frac{1}{\sqrt{8}}$

$$\boxed{\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}}$$

ESEMPIO

$$\sqrt{8x^3+1} \leq 1 - x$$

c.e.: $8x^3 + 1 \geq 0$

$8x^3 \geq -1$

$(2x)^3 \geq (-1)^3$

$2x \geq -1$

$x \geq -\frac{1}{2}$

Nota:

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

oppure: $8x^3+1 = (2x+1)(\underbrace{4x^2-2x+1}_{\Delta<0})$

$(2x+1)(4x^2-2x+1) \geq 0$

$\iff 2x+1 \geq 0$

$\iff x \geq -\frac{1}{2}$

La disequazione è equivalente a:

$$\begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 1 - x \geq 0 \\ 8x^3+1 \leq (1-x)^2 \end{cases}$$

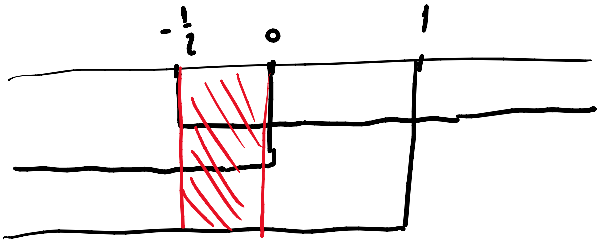
$$\begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \leq 1 \\ 8x^3 + \cancel{1} \leq \cancel{1} - 2x + x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \leq 1 \\ 8x^3 - x^2 + 2x \leq 0 \quad (*) \end{cases}$$

$x(\underbrace{8x^2 - x + 2}_{>0 \text{ perché } \Delta = 1 - 4\cdot16 < 0}) \leq 0$

$x \leq 0$

$$\begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \leq 1 \\ x \leq 0 \end{cases}$$



Soluzioni: $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$.

3

Esponenziali e logaritmi

Vogliamo risolvere equazioni del tipo $a^x = y$ con $x, y \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

- Caso banale: $a = 1$

  $1^x = y$

  - se $y = 1$ l'eq ione è risolta da ogni $x \in$
  - Se $y \neq 1$ l'e ziane non ha lusione.

TEOREMA (DI ESISTENZA DEI LOGARITMI)

Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ e sia $y \in \mathbb{R}$. Allora:

1) Se $y \leq 0$ l'equazione $a^x = y$ non ha soluzioni
2) Se $y > 0$ allora l'equazione $a^x = y$ ha un'unica soluzione.

Def: Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Sia $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$. Definiamo LOGARITMO IN BASE a DI y l'unica soluzione dell'equazione $a^x = y$ (e si indica con $\log_a y$).

(cioè $\log_a y$ è l'unico numero reale tale che $a^{\log_a y} = y$)

(cioè $\log_a y$ è l'esponente da dare ad a per ottenere y)

ESEMPI

- $\log_2 4 = 2$ perché $2^2 = 4$
- $\log_2 8 = 3$ perché $2^3 = 8$
- $\log_3 \frac{1}{3} = -1$ perché $3^{-1} = \frac{1}{3}$
- $\log_4 \frac{1}{16} = -2$ perché $4^{-2} = \frac{1}{16}$
- $\log_{10} 10000 = 4$ perché $10^4 = 10000$
- $\log_{10} 0{,}01 = -2$ perché $0{,}01 = \frac{1}{100} = 10^{-2}$
- $\log_{\frac{1}{5}} 25 = -2$ perché $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 25$
- $\log_{10} 10 = 1$ perché $10^1 = 10$

  $(\log_a a = 1)$ $a^1 = a$
- $\log_{10} 1 = 0$ perché $10^0 = 1$

Notazioni particolari:

- Il logaritmo in base e si indica $\log_e$ o $\log$ o con $\ln$

  si dice anche LOGARITMO NATURALE
- Il logaritmo in base 10 si indica spesso con Log (ma noi non useremo questa notazione).

Ricordare:

1) $\log_a y$ è definito solo se $y > 0$
2) $a^x = y \iff x = \log_a y$ (se $y > 0$)

ESEMPI

- $2 \cdot 3^x = 1$

$$3^x = \frac{1}{2}$$

$$x = \log_3 \frac{1}{2}$$

- $e^x = 5 \iff x = \log 5$

- $e^{2x-1} = 1$

$$2x - 1 = \log 1$$

$$2x - 1 = 0$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$e^{2x} e^{-1} = 1$$

$$e^{2x} = e$$

$$2x = \log e$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

- $\log_2 x = -3 \overset{(\text{c.e. } x > 0)}{\iff} x = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Allora:

1) $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$ e $\log_a \frac{1}{a} = -1$.

2) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$: $a^{\log_a x} = x$

3) $\forall x \in \mathbb{R}$: $\log_a a^x = x$

4) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$: $\log_a (x y) = \log_a x + \log_a y$

5) $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x \quad \forall x \in \mathbb{R}, x > 0.$

6) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$: $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

7) $\log_a x^n = n \log x \quad \forall x \in \mathbb{R}, x > 0, n \in \mathbb{R}.$

8) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \qquad \left(a^x = b \iff a = b^{\frac{1}{x}} \right)$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $a, b \neq 1$.

9) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

$\forall\, a, b \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ e $\forall\, x \in (0, +\infty)$.

ESERCIZIO

Risolvere : $3e^{2x} - e^{x} = 2$

$$3e^{2x} - e^{x} - 2 = 0$$

$$\overset{3e^{2x}}{\scriptstyle ||} \quad 3(e^x)^2$$

Sostituzione $t = e^x$:

$$3t^2 - t - 2 = 0$$

$$\Delta = 1 + 24 = 25$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{6} \begin{cases} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$t = 1 \quad \vee \quad t = -\frac{2}{3}$$

$$e^x = 1 \quad \vee \quad e^x = -\frac{2}{3}$$

$x = \log 1$ no soluzioni.

$x = 0$

L'unica soluzione è $x = 0$.

ESERCIZIO

$$\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = 3$$

c.e : $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$

$$\begin{cases} x > 1 \\ \log_2(x+1) + \log_2(x-1) = 3 \end{cases}$$

$$\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = 3$$

$$\log_2(x^2-1) = 3$$

$$2^3 = x^2 - 1$$

$$x^2 - 1 = 8$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \quad \vee \quad x = -3$$

Soluzioni: $\begin{cases} x \geq 1 \\ x = 3 \quad \vee \quad \underbrace{x = -3}_{\text{NO}} \end{cases} \iff x = 3$

ESERCIZIO

$$\log^3 x - 5\log x + 2 = 0$$

- c.e.: $x > 0$
- Sostituzione $t = \log x$

$$t^3 - 5t + 2 = 0$$

$$2^3 - 5 \cdot 2 + 2 = 0$$

2 è una radice

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -5 & 2 \\ 2 & & 2 & 4 & -2 \\ \hline & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}$$

$$(t-2)(t^2+2t-1) = 0$$

$$t = 2 \quad \vee \quad t^2 + 2t - 1 = 0$$

$$t = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$t = 2 \quad \vee \quad t = 1+\sqrt{2} \quad \vee \quad t = 1-\sqrt{2}$$

$$\log x = 2 \quad \vee \quad \log x = 1+\sqrt{2} \quad \vee \quad \log x = 1-\sqrt{2}$$

$$x = e^2 \quad \vee \quad x = e^{1+\sqrt{2}} \quad \vee \quad x = e^{1-\sqrt{2}}$$

Attenzione a non confondere

$$(\log_a x)^2 = \log_a^2 x$$

con

$$\log_a x^2 = \log_a(x^2)$$

Tutte soddisfano la c.e. $(x>0)$

PROPOSIZIONE

Sia $a \in \mathbb{R}$ $a \in (0,+\infty) \setminus \{1\}$. Allora $\forall x \in \mathbb{R}, y \in (0,+\infty)$

1) Se $a>1$: $\quad a^x \geq y \iff x \geq \log_a y$

2) Se $0<a<1$: $\quad a^x \geq y \iff x \leq \log_a y$

- $3^x > 2 \iff x > \log_3 2$
- $\log x < 1 \iff \begin{cases} x>0 \quad (\text{c.e.}) \\ x<e^1 \end{cases} \iff 0<x<e^1$
- $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 9 \iff x \geq \log_{\frac{1}{3}} 9 \iff x \geq -2$

  la base è $\frac{1}{3} \in (0,1)$

$$a^x = y \iff x = \log_a y$$

Questa equivalenza si può interpretare in vari modi:

- facendo il logaritmo di entrambi i lati della prima uguaglianza:

$$a^x = y \iff \log_a a^x = \log_a y$$
$$\iff x = \log_a y$$

- Passando agli esponenziali di entrambi i lati della seconda uguaglianza.

$$x = \log_a y \iff a^x = a^{\log_a y}$$
$$\iff a^x = y$$

$$e^{2x-1} = e \iff \log e^{2x-1} = \log e$$

$$(2x-1)\log e = 1$$

$$2x-1 = 1$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$