

ESERCIZI DI RIEPILOGO SULLA EQUAZIONI DIFFERENZIALI

EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI

Esercizio 1:

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (1-y^2)x^2 \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a(x) &= x^2 \\ b(y) &= 1-y^2 \end{aligned}$$

Le soluzioni costanti dell'equazione differenziale $y' = (1-y^2)x^2$ sono date dagli zeri della funzione b , ovvero

$$b(y) = 0 \Leftrightarrow 1-y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ oppure } y = -1$$

Osserviamo che $b(0) = 1 \neq 0$ pertanto il problema di Cauchy che stiamo considerando ammette una soluzione non costante, inoltre per il teorema di esistenza ed unicità $y(x) \in (-1, 1) \quad \forall x \in \text{dom}(y)$ (e priori sappiamo solamente che il dominio di y è un intorno di 2)

Applichiamo il metodo di separazione delle variabili:

$$\int \frac{1}{1-y^2} dy = \int x^2 dx$$

$$\text{Chieramente } \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C_1$$

$$\text{Calcoliamo } \int \frac{1}{1-y^2} dy, \text{ osserviamo che } 1-y^2 = (1-y)(1+y)$$

Determiniamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{1-y^2} = \frac{A}{1-y} + \frac{B}{1+y} = \frac{A(1+y) + B(1-y)}{(1-y)(1+y)} = \frac{(A+B)y + A+B}{1-y^2}$$

Per il principio di identità tra polinomi

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A+B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=B \\ 2A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1-y^2} dy &= \int \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-y} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+y} \right) dy = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-y} dy + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+y} dy \\ &= -\frac{1}{2} \ln|1-y| + \frac{1}{2} \ln|1+y| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right| + C_2 \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right| = \frac{x^3}{3} + C \quad \text{per un'opportuna costante } C \in \mathbb{R}$$

Ricordiamo che $y(x) \in (-1, 1)$, pertanto $|1+y| = 1+y$ (abbiamo usato $y > -1$)
 $|1-y| = 1-y$ (abbiamo usato $y < 1$)

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right) = \frac{x^3}{3} + c$$

Determiniamo il valore delle costanti imponendo la condizione iniziale $y(2) = 0$

$$\frac{1}{2} \ln 1 = \frac{8}{3} + c \Rightarrow c = -\frac{8}{3}$$

$$\text{Quindi } \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right) = \frac{1}{3} (x^3 - 8)$$

Espressiono y in funzione di x (cioè ricaviamo $y(x) = \dots$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right) &= \frac{1}{3} (x^3 - 8) \Rightarrow \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right) = \frac{2}{3} (x^3 - 8) \Rightarrow \frac{1+y}{1-y} = e^{\frac{2}{3} (x^3 - 8)} \\ \Rightarrow 1+y &= (1-y) e^{\frac{2}{3} (x^3 - 8)} \\ \Rightarrow y (1 + e^{\frac{2}{3} (x^3 - 8)}) &= e^{\frac{2}{3} (x^3 - 8)} - 1 \\ \Rightarrow y &= \frac{e^{\frac{2}{3} (x^3 - 8)} - 1}{e^{\frac{2}{3} (x^3 - 8)} + 1} \end{aligned}$$

Esercizio 2 : Determiniamo le soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{e^{-y}}{\sqrt{1-x^2}} \\ y(\frac{1}{2}) = 0 \end{cases}$$

$$a(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{funzione di classe } \mathcal{C}^1((-1, 1))$$

$$b(y) = e^{-y} \quad \text{funzione di classe } \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$$

Osserviamo che non ci sono soluzioni costanti dell'equazione $y' = \frac{e^{-y}}{\sqrt{1-x^2}}$ poiché b non ammette zeri.

Applichiamo il metodo di separazione delle variabili.

$$\int \frac{dy}{e^{-y}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{dy}{e^{-y}} = \int e^y dy = e^y + c_1, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c_2$$

$$\text{Pertanto } e^y = \arcsin x + c$$

Determiniamo il valore delle costanti c imponendo la condizione iniziale $y(0) = 0$

$$e^0 = \arcsin \frac{1}{2} + c \Rightarrow 1 = \frac{\pi}{6} + c \Rightarrow c = 1 - \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Dunque } e^y = \arcsin x + 1 - \frac{\pi}{6} \Rightarrow y(x) = \ln \left(1 - \frac{\pi}{6} + \arcsin x \right)$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL 2° ORDINE

Teorema (METODO DI SIMILARITÀ)

Consideriamo un'equazione differenziale lineare del 2° ordine del tipo

$$ay'' + by' + cy = g(x) \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R} \quad (a \neq 0)$$

Sia $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata

① Se $g(x) = \tilde{p}(x)$ è una funzione polinomiale di grado m

allora $\exists q(x)$ funzione polinomiale di grado $\leq m$ tale da

$$\bar{y}(x) = \begin{cases} q(x) & \text{se } \lambda=0 \text{ non è radice di } p(\lambda) \\ x \cdot q(x) & \text{se } \lambda=0 \text{ è radice di molteplicità } 1 \text{ di } p(\lambda) \\ x^2 \cdot q(x) & \text{se } \lambda=0 \text{ è radice di molteplicità } 2 \text{ di } p(\lambda) \end{cases}$$

Es 3

Es 1

è soluzione di $ay'' + by' + cy = g(x)$

② Se $g(x) = e^{\alpha x} \tilde{p}(x)$ con $\tilde{p}(x)$ funzione polinomiale di grado m

allora $\exists q(x)$ funzione polinomiale di grado $\leq m$ tale da

$$\bar{y}(x) = \begin{cases} e^{\alpha x} q(x) & \text{se } \lambda=\alpha \text{ non è radice di } p(\lambda) \\ e^{\alpha x} x q(x) & \text{se } \lambda=\alpha \text{ è radice di molteplicità } 1 \text{ di } p(\lambda) \\ e^{\alpha x} x^2 q(x) & \text{se } \lambda=\alpha \text{ è radice di molteplicità } 2 \text{ di } p(\lambda) \end{cases}$$

Es 5

Es 2

Es 8

è soluzione di $ay'' + by' + cy = g(x)$

③ Se $g(x) = \cos(\beta x) \tilde{p}(x)$ oppure $g(x) = \sin(\beta x) \tilde{p}(x)$

con $\tilde{p}(x)$ funzione polinomiale di grado n e $\beta \neq 0$, allora $\exists q_1(x), q_2(x)$

funzioni polinomiali di grado $\leq n$ tali da

$$\bar{y}(x) = \begin{cases} \cos(\beta x) q_1(x) + \sin(\beta x) q_2(x) & \text{se } \lambda = i\beta \text{ non è radice di } p(\lambda) \\ \cos(\beta x) x q_1(x) + \sin(\beta x) x q_2(x) & \text{se } \lambda = i\beta \text{ è radice di } p(\lambda) \end{cases}$$

Es 6

Es 4

è soluzione di $ay'' + by' + cy = g(x)$

④ Se $g(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x) \tilde{p}_1(x) + e^{\alpha x} \sin(\beta x) \tilde{p}_2(x)$

con $\tilde{p}_1(x)$ funzione polinomiale di grado m e $\beta \neq 0$

$\tilde{p}_2(x)$ funzione polinomiale di grado m

allora $\exists q_1(x), q_2(x)$ funzioni polinomiali di grado $\leq \max\{m, m\}$ tali da

$$\bar{y}(x) = \begin{cases} e^{\alpha x} (\cos(\beta x) q_1(x) + \sin(\beta x) q_2(x)) & \text{se } \lambda = \alpha + i\beta \text{ non è radice di } p(\lambda) \\ e^{\alpha x} (\cos(\beta x) x q_1(x) + \sin(\beta x) x q_2(x)) & \text{se } \lambda = \alpha + i\beta \text{ è radice di } p(\lambda) \end{cases}$$

Es 7

Es 9

è soluzione di $ay'' + by' + cy = g(x)$

NB: Ricordiamo che

$$\lambda_0 \text{ è radice di } p(\lambda) \iff p(\lambda_0) = 0$$

$$\lambda_0 \text{ è radice di molteplicità } 1 \text{ di } p(\lambda) \iff \begin{cases} p(\lambda_0) = 0 \\ p'(\lambda_0) \neq 0 \end{cases}$$

(radice semplice)

$$\lambda_0 \text{ è radice di molteplicità } 2 \text{ di } p(\lambda) \iff \begin{cases} p(\lambda_0) = p'(\lambda_0) = 0 \\ p''(\lambda_0) \neq 0 \end{cases}$$

(radice doppia)

Esercizio 1: Determinare la soluzione generale (detta anche INTEGRALE GENERALE) della seguente equazione differenziale

$$y'' - 3y' = x^2 + 1$$

Svolgimento: Cominciamo col determinare la soluzione generale y_0 dell'equazione omogenea associata. Calcoliamo le radici dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 - 3\lambda = 0 \implies \lambda(\lambda - 3) = 0 \implies \lambda = 0 \text{ e } \lambda = 3$$

Pertanto

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{3x} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Determiniamo una soluzione particolare dell'equazione completa con il metodo di similitudine. $x^2 + 1$ è una funzione polinomiale di grado 2

$\lambda = 0$ è radice semplice (= molteplicità 1) di $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda$

$$\bar{y}(x) = x(Ax^2 + Bx + C) \quad \text{con } A, B, C \in \mathbb{R} \text{ da determinare}$$

$$\bar{y}(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

$$\bar{y}'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$$\bar{y}''(x) = 6Ax + 2B$$

$$\bar{y} \text{ è soluzione di } y'' - 3y' = x^2 + 1 \iff \bar{y}''(x) - 3\bar{y}'(x) = x^2 + 1$$

$$\iff 6Ax + 2B - 9Ax^2 - 6Bx - 3C = x^2 + 1$$

$$\iff -9Ax^2 + (6A - 6B)x + 2B - 3C = x^2 + 1$$

$$\iff \begin{cases} -9A = 1 \\ 6A - 6B = 0 \\ 2B - 3C = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -\frac{1}{9} \\ B = A = -\frac{1}{9} \\ 3C = 2B - 1 \implies C = \frac{2}{3}B - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{9}\right) - \frac{1}{3} \\ = -\frac{2}{27} - \frac{1}{3} = -\frac{29}{27} \end{cases}$$

Demque $\bar{y}(x) = -\frac{x^2}{8} - \frac{x}{8} - \frac{29}{27}$ è una soluzione particolare

la soluzione generale è data da

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = C_1 + C_2 e^{3x} - \frac{x^2}{8} - \frac{x}{8} - \frac{29}{27} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Esercizio 2: Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 4y = e^{-2x}$$

Il polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^2 - 4$ ammette le radici reali $\lambda = \pm 2$

L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$y_0(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

Determiniamo una soluzione particolare con il metodo di similitudine

$\lambda = -2$ è radice semplice di $p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda + 2)$ pertanto cerchiamo una soluzione particolare del tipo $\bar{y}(x) = Ax e^{-2x}$

$$\bar{y}'(x) = A(e^{-2x} - 2x e^{-2x}) = A(1 - 2x)e^{-2x}$$

$$\begin{aligned} \bar{y}''(x) &= A(-2e^{-2x} + (1 - 2x)(-2)e^{-2x}) = A(-4 + 4x)e^{-2x} \\ &= 4A(x - 1)e^{-2x} \end{aligned}$$

$$\bar{y} \text{ è soluzione di } y'' - 4y = e^{-2x} \Leftrightarrow \bar{y}''(x) - 4\bar{y}(x) = e^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow 4A(x - 1)e^{-2x} - 4Ax e^{-2x} = e^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow [4A(x - 1) - 4Ax]e^{-2x} = e^{-2x} \Leftrightarrow -4Ae^{-2x} = e^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow -4A = 1 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{4}$$

$$\bar{y}(x) = -\frac{x}{4}e^{-2x} \quad \text{soluzione particolare}$$

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = C_1 e^{2x} + (C_2 - \frac{x}{4})e^{-2x} \quad \text{soluzione generale } (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Esercizio 3: Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 4y' + 5y = 3x + 1$$

$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$ polinomio caratteristico

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 5 = 16 - 20 = -4 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$

radici complesse coniugate

$y_0(x) = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$ integrale generale equazione omogenea associata

Determiniamo una soluzione particolare dell'equazione completa

$3x+1$ funzione polinomiale di grado 1

$\lambda=0$ non è radice di $p(x)$

Cerchiamo $\bar{y}(x) = Ax+B$ con $A, B \in \mathbb{R}$ da determinare

$$\bar{y}'(x) = A, \quad \bar{y}''(x) = 0$$

$\bar{y}$ è soluzione di $y'' - 4y' + 5y = 3x+1 \Leftrightarrow \bar{y}''(x) - 4\bar{y}'(x) + 5\bar{y}(x) = 3x+1$

$$\Leftrightarrow -4A + 5Ax + 5B = 3x+1$$

$$\Leftrightarrow 5Ax - 4A + 5B = 3x+1 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 5A = 3 \\ -4A + 5B = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{5} \\ B = \frac{4}{5}A + \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{12}{25} + \frac{1}{5} = \frac{17}{25} \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = \frac{3}{5}x + \frac{17}{25} \quad \text{Soluzione particolare}$$

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^{2x} + \frac{3}{5}x + \frac{17}{25} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

integrale generale

Esercizio 4: Determinare l'integrale generale di

$$y'' + y = \sin x$$

Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda+i)(\lambda-i)$

$$y_0(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad \text{integrale generale dell'eq. omogenea}$$

Determiniamo una soluzione particolare con il metodo di similitudine

$\lambda = i$ è radice (semplice) di $p(\lambda)$

Cerchiamo $\bar{y}$ della seguente forma $\bar{y}(x) = x(A \cos x + B \sin x)$

con $A, B \in \mathbb{R}$ da determinare

$$\begin{aligned} \bar{y}'(x) &= (A \cos x + B \sin x) + x(-A \sin x + B \cos x) \\ &= (A+Bx) \cos x + (B-Ax) \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{y}''(x) &= B \cos x - (A+Bx) \sin x - A \sin x + (B-Ax) \cos x \\ &= (2B-Ax) \cos x - (2A+Bx) \sin x\end{aligned}$$

$\bar{y}$ è soluzione di $y''+y = \sin x \Leftrightarrow \bar{y}''(x) + \bar{y}(x) = \sin x$

$$\Leftrightarrow (2B-Ax) \cos x - (2A+Bx) \sin x + x(A \cos x + B \sin x) = \sin x$$

$$\Leftrightarrow 2B \cos x - 2A \sin x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2B=0 \\ -2A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=0 \\ A=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = -\frac{x}{2} \cos x \quad \text{soluzione particolare}$$

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = (C_1 - \frac{x}{2}) \cos x + C_2 \sin x \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

integrale generale dell'equazione completa

Esercizio 5 : Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali

$$y'' + 2y' + 10y = x e^{-x}$$

$$\text{Il polinomio caratteristico è } p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 10$$

$$\Delta = 4 - 40 = -36 \quad \lambda_{1/2} = \frac{-2 \pm 6i}{2} = -1 \pm 3i$$

$$y_0(x) = (C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)) e^{-x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

integrale generale dell'equazione omogenea associata

$$x e^{-x} \quad \text{polinomio di grado 1} \times e^{-x}$$

$\lambda = -1$ non è radice di $p(\lambda)$

ATTENZIONE: il fatto che le radici di $p(\lambda)$ abbiano parti reali -1 non significa che anche -1 sia radice di $p(\lambda)$!!

cerchiamo una soluzione particolare della forma $\bar{y}(x) = (Ax+B)e^{-x}$ $A, B \in \mathbb{R}$ da determinare

$$\bar{y}'(x) = A e^{-x} - (Ax+B) e^{-x} = (-Ax + (A-B)) e^{-x}$$

$$\bar{y}''(x) = -A e^{-x} + (-Ax + (A-B)) (-e^{-x}) = (Ax + (-2A+B)) e^{-x}$$

$$\bar{y} \text{ \u00e9 solutionne di } y'' + 2y' + 10y = x e^{-x} \Leftrightarrow \bar{y}''(x) + 2\bar{y}'(x) + 10\bar{y}(x) = x e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow (Ax + (-2A+B))e^{-x} + 2(-Ax + (A-B))e^{-x} + 10(Ax+B)e^{-x} = x e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow [(A-2A+10A)x + (-2A+B+2(A-B)+10B)]e^{-x} = x e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow [9Ax + 9B]e^{-x} = x e^{-x} \Leftrightarrow 9Ax + 9B = x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9A=1 \\ 9B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{9} \\ B=0 \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = \frac{x}{9} e^{-x} \text{ solutionne particolare}$$

$$\begin{aligned} y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) &= (c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x))e^{-x} + \frac{x}{9} e^{-x} \\ &= (c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x) + \frac{x}{9})e^{-x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

integrale generale

Esercizio 6 : Determinare l'integrale generale della seguente equazione

$$y'' - 3y' + 2y = \cos x + 2 \sin x$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-2)(\lambda-1) \quad \lambda=1,2 \text{ radici di } p \text{ (reali e distinte)}$$

L'integrale generale dell'equazione omogenea associata \u00e9

$$y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

Determiniamo una soluzione particolare con il metodo di similitudine

$\lambda = i$ non \u00e9 radice di $p(\lambda)$, dunque cerchiamo una soluzione del tipo

$$\bar{y}(x) = A \cos x + B \sin x \quad \text{con } A, B \in \mathbb{R} \text{ da determinare}$$

$$\bar{y}'(x) = -A \sin x + B \cos x$$

$$\bar{y}''(x) = -A \cos x - B \sin x$$

$$\bar{y} \text{ \u00e9 solutionne di } y'' - 3y' + 2y = \cos x + 2 \sin x$$

$$\Leftrightarrow \bar{y}''(x) - 3\bar{y}'(x) + 2\bar{y}(x) = \cos x + 2 \sin x$$

$$\Leftrightarrow -A \cos x - B \sin x + 3A \sin x - 3B \cos x + 2A \cos x + 2B \sin x = \cos x + 2 \sin x$$

$$\Leftrightarrow (-A-3B+2A) \cos x + (-B+3A+2B) \sin x = \cos x + 2 \sin x$$

$$\Leftrightarrow (A-3B) \cos x + (3A+B) \sin x = \cos x + 2 \sin x$$

Risoluiamo il seguente sistema

$$\begin{cases} A - 3B = 1 \\ 3A + B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3B + 1 \\ 3(3B + 1) + B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3B + 1 \\ 10B = -1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} A = \frac{7}{10} \\ B = -\frac{1}{10} \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = \frac{7}{10} \cos x - \frac{1}{10} \sin x \quad \text{soluzione particolare}$$

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = c_1 e^x + c_2 e^{5x} + \frac{7}{10} \cos x - \frac{1}{10} \sin x \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

integrale generale

Esercizio 7 : $y'' - 10y' + 25y = e^x \cos x$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 25 = (\lambda - 5)^2 \quad \lambda = 5 \text{ è radice doppia di } p(\lambda)$$

L'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_0(x) = (c_1 + c_2 x) e^{5x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

Determiniamo una soluzione particolare

$$\lambda = 1 + i \text{ non è radice di } p(\lambda)$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 e^x $\cos x$ nel termine non omogeneo

cerchiamo quindi $\bar{y}(x) = (A \cos x + B \sin x) e^x$ con $A, B \in \mathbb{R}$ da determinare

$$\begin{aligned} \bar{y}'(x) &= (-A \sin x + B \cos x) e^x + (A \cos x + B \sin x) e^x \\ &= ((A+B) \cos x + (-A+B) \sin x) e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y}''(x) &= (-(A+B) \sin x + (-A+B) \cos x) e^x + ((A+B) \cos x + (-A+B) \sin x) e^x \\ &= (2B \cos x - 2A \sin x) e^x \end{aligned}$$

$$\bar{y} \text{ è soluzione di } y'' - 10y' + 25y = e^x \cos x$$

$$\Leftrightarrow \bar{y}''(x) - 10\bar{y}'(x) + 25\bar{y}(x) = e^x \cos x$$

$$\Leftrightarrow (2B \cos x - 2A \sin x) e^x - 10((A+B) \cos x + (-A+B) \sin x) e^x + 25(A \cos x + B \sin x) e^x = e^x \cos x$$

$$\Leftrightarrow [(2B - 10(A+B) + 25A) \cos x + (-2A - 10(-A+B) + 25B) \sin x] e^x = e^x \cos x$$

$$\Leftrightarrow (15A + 8B) \cos x + (8A + 15B) \sin x = \cos x$$

Risoluiamo il sistema

$$\begin{cases} 15A + 8B = 1 \\ 8A + 15B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{15}{161} \\ B = -\frac{8}{161} \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = \left(\frac{15}{161} \cos x - \frac{8}{161} \sin x \right) e^x$$

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = (C_1 + C_2 x) e^{5x} + \left(15 \cos x - 8 \sin x \right) \frac{e^x}{161} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Esercizio 8: $y'' + 2y' + y = x e^{-x}$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 \quad \lambda = -1 \text{ è radice doppia di } p(\lambda)$$

$y_0(x) = (C_1 + C_2 x) e^{-x}$ integrale generale dell'equazione omogenea associata

Cerchiamo una soluzione particolare con il metodo di similitudine

$$\lambda = -1 \text{ è radice doppia di } p(\lambda) \Rightarrow \bar{y}(x) = (Ax + B) x^2 e^{-x} \quad \text{con } A, B \in \mathbb{R} \text{ da determinare}$$

$\uparrow$
 e^{-x} nel termine non omogeneo

$$\bar{y}(x) = (Ax^3 + Bx^2) e^{-x}$$

$$\begin{aligned} \bar{y}'(x) &= (3Ax^2 + 2Bx) e^{-x} - (Ax^3 + Bx^2) e^{-x} \\ &= (-Ax^3 + (3A - B)x^2 + 2Bx) e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y}''(x) &= (-3Ax^2 + 2(3A - B)x + 2B) e^{-x} - (-Ax^3 + (3A - B)x^2 + 2Bx) e^{-x} \\ &= (Ax^3 + (-6A + B)x^2 + 2(3A - 2B)x + 2B) e^{-x} \end{aligned}$$

$$\bar{y} \text{ è soluzione di } y'' + 2y' + y = x e^{-x} \Leftrightarrow \bar{y}''(x) + 2\bar{y}'(x) + \bar{y}(x) = x e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow (Ax^3 + (-6A + B)x^2 + 2(3A - 2B)x + 2B) e^{-x} + 2(-Ax^3 + (3A - B)x^2 + 2Bx) e^{-x} + (Ax^3 + Bx^2) e^{-x} = x e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow [(A - 2A + A)x^3 + (-6A + B + 2(3A - B) + B)x^2 + (2(3A - 2B) + 2B)x + 2B] e^{-x} = x e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow [(6A + 2B)x + 2B] e^{-x} = x e^{-x} \Leftrightarrow (6A + 2B)x + 2B = x$$

Risoluiamo il sistema

$$\begin{cases} 6A + 2B = 1 \\ 2B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{6} \\ B = 0 \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = \frac{x^3}{6} e^{-x} \text{ soluzione particolare}$$

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = (C_1 + C_2 x + \frac{x^3}{6}) e^{-x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

integrale generale

Esercizio 9 : $4y'' + 4y' + 2y = 3 \cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$

$p(\lambda) = 4\lambda^2 + 4\lambda + 2$ polinomio caratteristico

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = -16 \quad \lambda_{1/2} = \frac{-4 \pm 4i}{8} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}$

$y_0(x) = (C_1 \cos(\frac{x}{2}) + C_2 \sin(\frac{x}{2})) e^{-\frac{x}{2}}$ integrale generale dell'equazione omogenea associata

Determiniamo una soluzione particolare dell'equazione completa

$\lambda = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$ è radice (semplice) di $p(\lambda)$

$\nearrow e^{-\frac{x}{2}} \quad \nwarrow \cos(\frac{x}{2})$ nel termine non omogeneo $g(x) = 3 \cos(\frac{x}{2}) e^{-\frac{x}{2}}$

Per il metodo di similitudine cerchiamo una soluzione dell'equazione completa

del tipo $\bar{y}(x) = (A \cos(\frac{x}{2}) + B \sin(\frac{x}{2})) x e^{-\frac{x}{2}}$ con $A, B \in \mathbb{R}$ da determinare

$$\begin{aligned} \bar{y}'(x) &= \left(-\frac{A}{2} \sin(\frac{x}{2}) + \frac{B}{2} \cos(\frac{x}{2})\right) x e^{-\frac{x}{2}} + (A \cos(\frac{x}{2}) + B \sin(\frac{x}{2})) \underbrace{\left(1 - \frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}}_{\text{derivata di } x e^{-\frac{x}{2}}} \\ &= \left(\left(\frac{B}{2}x + A\left(1 - \frac{x}{2}\right)\right) \cos(\frac{x}{2}) + \left(-\frac{A}{2}x + B\left(1 - \frac{x}{2}\right)\right) \sin(\frac{x}{2})\right) e^{-\frac{x}{2}} \\ &= \left[\left(\left(-\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)x + A\right) \cos(\frac{x}{2}) + \left(\left(-\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right)x + B\right) \sin(\frac{x}{2})\right] e^{-\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y}''(x) &= \left[\left(-\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) \cos(\frac{x}{2}) - \frac{1}{2} \left(\left(-\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)x + A\right) \sin(\frac{x}{2}) \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) \sin(\frac{x}{2}) + \frac{1}{2} \left(\left(-\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right)x + B\right) \cos(\frac{x}{2}) \right] e^{-\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{2} \left[\left(\left(-\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)x + A\right) \cos(\frac{x}{2}) + \left(\left(-\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right)x + B\right) \sin(\frac{x}{2}) \right] e^{-\frac{x}{2}}$$

$$= \left[\left(-\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(\left(-\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right)x + B\right) - \frac{1}{2} \left(\left(-\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)x + A\right) \right] \cos(\frac{x}{2}) e^{-\frac{x}{2}}$$

$$+ \left[-\frac{1}{2} \left(\left(-\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)x + A\right) + \left(-\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) - \frac{1}{2} \left(\left(-\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right)x + B\right) \right] \sin(\frac{x}{2}) e^{-\frac{x}{2}}$$

$$= \left[\left(-\frac{B}{2}x - A + B\right) \cos(\frac{x}{2}) + \left(\frac{A}{2}x - A - B\right) \sin(\frac{x}{2}) \right] e^{-\frac{x}{2}}$$

$\bar{y}$ è soluzione di $4y'' + 4y' + 2y = 3 \cos(\frac{x}{2}) e^{-\frac{x}{2}}$

$\Leftrightarrow 4\bar{y}''(x) + 4\bar{y}'(x) + 2\bar{y}(x) = 3 \cos(\frac{x}{2}) e^{-\frac{x}{2}}$

$\Leftrightarrow 4 \left[\left(-\frac{B}{2}x - A + B\right) \cos(\frac{x}{2}) + \left(\frac{A}{2}x - A - B\right) \sin(\frac{x}{2}) \right] e^{-\frac{x}{2}}$

$+ 4 \left[\left(\left(-\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)x + A\right) \cos(\frac{x}{2}) + \left(\left(-\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right)x + B\right) \sin(\frac{x}{2}) \right] e^{-\frac{x}{2}}$

$+ 2 \left[A x \cos(\frac{x}{2}) + B x \sin(\frac{x}{2}) \right] e^{-\frac{x}{2}} = 3 \cos(\frac{x}{2}) e^{-\frac{x}{2}}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2Bx - 4A + 4B - 2Ax + 2Bx + 4A + 2Ax \end{bmatrix} \cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} + \begin{bmatrix} 2Ax - 4A - 4B - 2Ax - 2Bx + 4B + 2Bx \end{bmatrix} \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} = 3 \cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 4B \cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} - 4A \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} = 3 \cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 4B \cos\left(\frac{x}{2}\right) - 4A \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 3 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4B = 3 \\ -4A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = \frac{3}{4} x \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} \text{ soluzione particolare}$$

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = \left(C_1 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \left(C_2 + \frac{3}{4}x\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right) e^{-\frac{x}{2}} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

integrale generale

Esercizio 10 :

- Determinare la soluzione generale di $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$
- Determinare la soluzione generale di $y'' - 4y' + 4y = 2x + 1$
- Determinare la soluzione generale di $y'' - 4y' + 4y = \cos x - \sin x$
- Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x} + 2x + 1 + 5(\cos x - \sin x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento :

- Cominciamo col determinare le soluzioni generali dell'equazione omogenea associata $y'' - 4y' + 4y = 0$

Calcoliamo le radici del polinomio caratteristico

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

$\lambda = 2$ è radice doppia (radice di molteplicità 2)

Le soluzioni generali di $y'' - 4y' + 4y = 0$ è data da

$$y_0(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Per determinare le soluzioni generali di $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$

appliciamo il metodo di similitudine.

Stiamo considerando $y_1(x) = e^{2x}$ e 2 è radice doppia

del polinomio caratteristico $\lambda^2 - 4\lambda + 4$, pertanto cerchiamo una soluzione

del tipo $\bar{y}_1(x) = Ax^2 e^{2x}$ con $A \in \mathbb{R}$ da determinare

$$\bar{y}'_1(x) = A(2x + 2x^2)e^{2x} = 2A(x^2 + x)e^{2x}$$

$$\bar{y}''_1(x) = 2A[(2x+1)e^{2x} + 2(x^2+x)e^{2x}] = 2A(2x^2 + 4x + 1)e^{2x}$$

$$\bar{y}_1 \text{ è soluzione di } y'' - 4y' + 4y = g_1(x) \Leftrightarrow \bar{y}''_1(x) - 4\bar{y}'_1(x) + 4\bar{y}_1(x) = e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow 2A(2x^2 + 4x + 1)e^{2x} - 8A(x^2 + x)e^{2x} + 4Ax^2e^{2x} = e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow [(4A - 8A + 4A)x^2 + (8A - 8A)x + 2A]e^{2x} = e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow 2Ae^{2x} = e^{2x} \quad \Leftrightarrow 2A = 1 \quad \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$$

Pertanto $\bar{y}_1(x) = \frac{x^2}{2}e^{2x}$ è una soluzione particolare di $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$

mentre $y_1(x) = (C_1 + C_2x + \frac{x^2}{2})e^{2x}$ è la soluzione generale ($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$)

b) Stiamo considerando l'equazione differenziale

$$y'' - 4y' + 4y = g_2(x) \quad \text{con } g_2(x) = 2x + 1$$

Ovviamente l'equazione omogenea associata è la stessa del punto precedente, pertanto ci limitiamo a cercare una soluzione particolare dell'equazione completa con il metodo di similitudine

Osserviamo che $\lambda = 0$ non è radice del polinomio caratteristico $p(\lambda) = (\lambda - 2)^2$

pertanto cerchiamo una soluzione particolare del tipo $\bar{y}_2(x) = Bx + C$

con $B, C \in \mathbb{R}$ da determinare

$$\bar{y}'_2(x) = B$$

$$\bar{y}''_2(x) = 0$$

$$\bar{y}_2 \text{ è soluzione di } y'' - 4y' + 4y = g_2(x) \Leftrightarrow \bar{y}''_2(x) - 4\bar{y}'_2(x) + 4\bar{y}_2(x) = 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow 0 - 4B + 4(Bx + C) = 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow 4Bx + 4(-B + C) = 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4B = 2 \\ -4B + 4C = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{1}{2} \\ 4C = 1 + 4B = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{1}{2} \\ C = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$\bar{y}_2(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$ è una soluzione particolare di $y'' - 4y' + 4y = 2x + 1$

$y_2(x) = (C_1 + C_2x)e^{2x} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$ è la soluzione generale ($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$)

c) Anche in questo caso la parte omogenea è la stessa dei punti precedenti:

$$y'' - 4y' + 4y = g_3(x) \quad \text{con} \quad g_3(x) = \cos x - \sin x$$

Applichiamo il metodo di similitudine per trovare una soluzione particolare

$\lambda = i$ non è radice di $p(\lambda) = (\lambda - 2)^2$, pertanto cerchiamo

una soluzione del tipo $\bar{y}_3(x) = D \cos x + E \sin x$ con $D, E \in \mathbb{R}$ da determinare

$$\bar{y}_3'(x) = -D \sin x + E \cos x$$

$$\bar{y}_3''(x) = -D \cos x - E \sin x$$

$\bar{y}_3$ è soluzione di $y'' - 4y' + 4y = \cos x - \sin x$

$$\Leftrightarrow \bar{y}_3''(x) - 4\bar{y}_3'(x) + 4\bar{y}_3(x) = \cos x - \sin x$$

$$\Leftrightarrow -D \cos x - E \sin x + 4D \sin x - 4E \cos x + 4D \cos x + 4E \sin x = \cos x - \sin x$$

$$\Leftrightarrow (-D - 4E + 4D) \cos x + (-E + 4D + 4E) \sin x = \cos x - \sin x$$

$$\Leftrightarrow (3D - 4E) \cos x + (4D + 3E) \sin x = \cos x - \sin x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3D - 4E = 1 \\ 4D + 3E = -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} D = -\frac{1}{25} \\ E = -\frac{7}{25} \end{cases}$$

$$\text{Abbiamo trovato} \quad \bar{y}_3(x) = -\frac{1}{25} \cos x - \frac{7}{25} \sin x$$

Dunque la soluzione generale di $y'' - 4y' + 4y = g_3(x)$ è data da

$$y_3(x) = (C_1 + C_2 x) e^{2x} - \frac{1}{25} \cos x - \frac{7}{25} \sin x \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

d) Osserveremo che il problema di Cauchy si può risolvere come segue

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 3g_1(x) + g_2(x) + 5g_3(x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Grazie al principio di sovrapposizione possiamo scrivere immediatamente la soluzione generale dell'equazione differenziale come segue

$$\begin{aligned}
 y(x) &= y_0(x) + 3\bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x) + 5\bar{y}_3(x) \\
 &= (C_1 + C_2 x)e^{2x} + \frac{3}{2}x^2e^{2x} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{5}(\cos x + 7\sin x) \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})
 \end{aligned}$$

Determiniamo le costanti C_1, C_2 affinché le condizioni iniziali $y(0) = 1, y'(0) = 0$ siano soddisfatte

$$y(0) = C_1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{5} = C_1 + \frac{15-4}{20} = C_1 + \frac{11}{20}$$

$$\begin{aligned}
 y'(x) &= (C_2 + 2(C_1 + C_2 x))e^{2x} + (3x + 3x^2)e^{2x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5}(-\sin x + 7\cos x) \\
 &= (2C_1 + C_2 + 2C_2 x)e^{2x} + 3(x^2 + x)e^{2x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}(\sin x - 7\cos x)
 \end{aligned}$$

$$y'(0) = 2C_1 + C_2 + \frac{1}{2} - \frac{7}{5} = 2C_1 + C_2 + \frac{5-14}{10} = 2C_1 + C_2 - \frac{9}{10}$$

Pertanto

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + \frac{11}{20} = 1 \\ 2C_1 + C_2 - \frac{9}{10} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{9}{20} \\ 2C_1 + C_2 = \frac{9}{10} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{9}{20} \\ \frac{9}{10} + C_2 = \frac{9}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{9}{20} \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

La soluzione al problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{9}{20}e^{2x} + \frac{3}{2}x^2e^{2x} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{5}(\cos x + 7\sin x)$$