LEZIONE 35

giovedì 15 dicembre 2022 09:05

Equazioni integrabili: $y^{(n)} = f(x)$

Equazioni lineari di I ordine: $y' = a(x)\,y + g(x)$

Equazioni a variabili separabili: $y' = a(x)\,b(y)$.

EQUAZIONI LINEARI DI II ORDINE (a coefficienti costanti).

Sono equazioni del tipo:

$a\,y'' + b\,y' + c\,y = g(x)$ dove $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $g \in C(I)$, I intervallo.

OSS le equazioni lineari di I ordine $y' = a(x)\,y + g(x)$, se $a(x)$ è costante, si riscrivono come: $y' - a\,y = g(x)$.

L'equazione $a\,y'' + b\,y' + c\,y = g(x)$ si dice:

- OMOGENEA se $g(x) = 0 \quad \forall x \in I$.
- COMPLETA / NON OMOGENEA se $g(x) \neq 0$ (per qualche x).

Def: Data l'equazione $a\,y'' + b\,y' + c\,y = g(x)$, il polinomio $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ si dice POLINOMIO CARATTERISTICO DELL'EQUAZIONE. L'equazione polinomiale $p(\lambda) = 0$ si dice EQUAZIONE CARATTERISTICA.

OSS 1

Se $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ è radice del polinomio caratteristico, allora $y(x) = e^{\bar{\lambda} x}$ risolve l'equazione omogenea

$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$.

DIM

$y(x) = e^{\bar{\lambda} x}, \quad y'(x) = e^{\bar{\lambda} x}\,\bar{\lambda}, \quad y''(x) = e^{\bar{\lambda} x}(\bar{\lambda})^2.$

Allora $a\, y''(x) + b\, y'(x) + c\, y(x) =$

$$= a\, e^{\bar\lambda x} (\bar\lambda)^2 + b\, e^{\bar\lambda x} \bar\lambda + c\, e^{\bar\lambda x}$$

$$= e^{\bar\lambda x} \underbrace{(a \bar\lambda^2 + b \bar\lambda + c)}_{=0.} = 0$$

OSS: Se il polinomio caratteristico $p(\lambda)$ è del tipo $p(\lambda) = a(\lambda - \bar\lambda)^2$ $(\Delta = 0)$ allora $y_1(x) = e^{\bar\lambda x}$ e $y_2(x) = e^{\bar\lambda x} x$ sono due soluzioni dell'equazione omogenea $a y'' + b y' + c y = 0$.

OSS 3 Se $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ ha due radici complesse $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, allora le funzioni $y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ e $y_2(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ sono soluzioni dell'equazione $a y'' + b y' + c y = 0$.

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE.

Sia y_1 una soluzione di $a y'' + b y' + c y = g_1(x)$ e sia y_2 una soluzione di $a y'' + b y' + c y = g_2(x)$. Allora $\forall\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ la funzione $z = C_1 y_1 + C_2 y_2$ risolve l'equazione $a z'' + b z' + c z = C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x)$.

TEOREMA (SOLUZIONI DI EQUAZIONI LINEARI OMOGENEE DI II ORDINE)

Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$. Consideriamo l'equazione omogenea $a y'' + b y' + c y = 0$.

1) Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, allora la soluzione generale dell'eq. è $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ dove λ_1, λ_2 sono le due radici del polinomio caratteristico $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$.

2) Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. Allora la soluzione generale è $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_1 x} x$
dove λ_1 è l'unica radice reale del polinomio caratteristico.

3) Se $\Delta < 0$, allora la soluzione generale è:
$y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ dove
$\alpha \pm i\beta$ sono le radici complesse del polinomio caratteristico.

ESEMPIO 1

$$y'' + y' - 2y = 0$$

Eq. caratteristica : $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

La soluzione generale dell'eq. differenziale è
$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}$

ESEMPIO 2

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Eq. caratteristica : $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$
$(\lambda+1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1.$

La soluzione generale è
$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} x$

ESEMPIO 3

$$y'' - 6y' + 25y = 0$$

Eq. caratteristica : $\lambda^2 - 6\lambda + 25 = 0$ $\quad \Delta = 36 - 100 = -64$

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{6 \pm i\sqrt{64}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm 8i}{2} = 3 \pm 4i$$

La soluzione generale è del tipo:

$$y(x) = C_1 e^{3x} \cos(4x) + C_2 e^{3x} \sin(4x)$$

ESEMPIO 4

$$y'' + 4y = 0$$

Eq. caratteristica: $\lambda^2 + 4 = 0.$ $\quad \lambda^2 - i^2 4 = 0$

$(\lambda - 2i)(\lambda + 2i) = 0$

$\lambda^2 = -4$

$\lambda = \pm\sqrt{-4} = \pm i\sqrt{4} = \pm 2i$

$$\lambda_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{\pm i\sqrt{16}}{2} = \pm 2i$$

$\lambda_{1,2} = \pm 2i = 0 \pm 2i$

Soluzione generale:

$$y(x) = C_1 e^{0x} \cos(2x) + C_2 e^{0 \cdot x} \sin(2x)$$

$$= C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x).$$

ESEMPIO

$$y'' - 4y' = 0$$

Eq. caratt. $\lambda^2 - 4\lambda = 0 \iff \lambda(\lambda - 4) = 0$

$\iff \lambda = 0 \ \vee \ \lambda = 4$

Sol. generale:

$$y(x) = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{4x} = C_1 + C_2 e^{4x}.$$

Caso non omogeneo:

TEOREMA.

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $g \in C(I)$. Se $\bar{y}$ è una soluzione di $a y'' + b y' + c y = g(x)$, allora la soluzione generale è $y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x)$ dove $y_0(x)$ è la sol. generale dell'eq. omogenea $a y'' + b y' + c y = 0$.

Ricapitolando: Per risolvere $a y'' + b y' + c y = g(x)$:

1) Si risolve $a y'' + b y' + c y = 0$.
2) Si trova una soluzione particolare $\bar{y}$ di $a y'' + b y' + c y = g(x)$ (metodo di similarità)
3) La sol. generale è $\bar{y}(x) + y_0(x)$ dove y_0 è la sol. del punto 1).

ESEMPIO

$$y'' - 3y' + 2y = x^2 + 5x - 1$$

1) Risolviamo l'eq. omogenea: $y'' - 3y' + 2y = 0$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

La sol generale dell'eq. omogenea

$$y_0(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x}.$$

2) Cerchiamo una sol. particolare $\bar{y}$ dell'eq. completa.

$g(x) = x^2 + 5x - 1$ è un polinomio di 2° grado.

Cerchiamo $\bar{y}(x) = Ax^2 + Bx + C$.

$$\bar{y}'(x) = 2Ax + B$$

$$\bar{y}''(x) = 2A.$$

Vogliamo che: $\bar{y}'' - 3\bar{y}' + 2\bar{y} = x^2 + 5x - 1$

$$2A - 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2 + 5x - 1$$
$$2A - 6Ax - 3B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C = x^2 + 5x - 1$$
$$2Ax^2 + (-6A + 2B)x + 2A - 3B + 2C = x^2 + 5x - 1$$

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ -6A + 2B = 5 \\ 2A - 3B + 2C = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ 2B = 5 + 6A = 8 \Rightarrow B = 4 \\ 2C = -1 + 3B - 2A = 10 \Rightarrow C = 5 \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 5.$$

3) Conclusione: la sol. generale dell'eq. completa è:

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x)$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + 4x + 5 + c_1 e^{2x} + c_2 e^{x}.$$

Regole per il metodo di similarità:

1) Se $g(x)$ è un polinomio di grado K.

Cerchiamo $\bar{y}$ come:

- un pol. di grado $\leq K$ se 0 non è radice del pol. caratteristico ($p(0) \neq 0$)
- un pol. di grado $\leq K$ moltiplicato per x^m dove m è la molteplicità di 0 come radice del pol. caratteristico, se $p(0) = 0$.

2) $g(x) = q(x) e^{\alpha x}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ e q pol. di grado K.

In questo caso:

$$\bar{y}(x) = \begin{cases} h(x) e^{\alpha x} & \text{con } h \text{ pol. di grado} \leq K \text{ se } p(\alpha) \neq 0. \\ h(x) e^{\alpha x} x^m & \text{con } h \text{ pol. di grado} \leq K \text{ e } m \text{ molteplicità di } \alpha \text{ come radice di } p \text{, se } p(\alpha) = 0. \end{cases}$$

3) $g(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)\, q(x)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e q pol. di grado k.

$$\bar{y}(x) = \begin{cases} e^{\alpha x}\cos(\beta x)\, h_1(x) + e^{\alpha x}\sin(\beta x)\, h_2(x) & \text{se } p(\alpha + i\beta) \neq 0 \\ \left(e^{\alpha x}\cos(\beta x)\, h_1(x) + e^{\alpha x}\sin(\beta x)\, h_2(x)\right) x & \text{se } p(\alpha+i\beta) = 0. \end{cases}$$

ESERCIZIO 1

$$y'' - y' = 3x + 1$$

1) Risolviamo l'eq. omogenea: $y'' - y' = 0$.

$\lambda^2 - \lambda = 0 \iff \lambda(\lambda - 1) = 0. \Rightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 1.$

Sol. generale dell'eq. omogenea è:

$y_0(x) = c_1 + c_2 e^x$

2) Cerchiamo una sol. particolare $\bar{y}$ dell'eq. completa:

$g(x) = 3x + 1$

$\bar{y}(x) = (Ax + B)\, x = Ax^2 + Bx$

$\bar{y}'(x) = 2Ax + B$

$\bar{y}''(x) = 2A$

Sostituiamo nell'equazione: $\bar{y}'' - \bar{y}' = 3x + 1$

$2A - (2Ax + B) = 3x + 1$

$-2Ax + 2A - B = 3x + 1$

$$\begin{cases} -2A = 3 \\ 2A - B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{3}{2} \\ B = 2A - 1 = -4 \end{cases}$$

$\bar{y}(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 4x$

Conclusione: la sol. generale dell'eq. completa è

$y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 4x + c_1 + c_2 e^x$

E se dimentico di moltiplicare per x? Non torna!

SBAGLIATO:

$\bar{y}(x) = Ax + B$

$\bar{y}'(x) = A$

$\bar{y}''(x) = 0$

$\bar{y}'' - \bar{y}' = -A$

Vorrei $-A = 3x + 1$

$\begin{cases} 0 = 3 \\ -A = 1 \end{cases}$ ↯ assurdo.

ESERCIZIO 2 Determinare la soluzione generale dell'equazione
$y'' - y' - 2y = 2x - 3$.

1) Eq. omogenea: $y'' - y' - 2y = 0$.

Eq. caratteristica: $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \begin{array}{l} \nearrow 2 \\ \searrow -1 \end{array}$$

$y_0(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$.

2) Cerchiamo una sol. particolare $\bar{y}(x)$:

$f(x) = 2x - 3$

$\bar{y}(x) = Ax + B$

$\bar{y}'(x) = A$

$\bar{y}''(x) = 0$

Sostituiamo nell'equazione: $\bar{y}'' - \bar{y}' - 2\bar{y} = 2x - 3$

$0 - A - 2(Ax + B) = 2x - 3$

$-2Ax - A - 2B = 2x - 3$

$$\begin{cases} -2A = 2 \\ -A - 2B = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ 2B = -A + 3 = 4 \end{cases} \Rightarrow B = 2$$

$\bar{y}(x) = -x + 2 = 2 - x$

Conclusione: la sol. generale dell'eq. completa è
$y(x) = 2 - x + C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$.

ESERCIZIO 3

$3y'' + y' + y = 5x e^{2x}$

1) Eq. omogenea $3y'' + y' + y = 0$

Eq. caratteristica: $3\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-12}}{6} = \frac{-1 \pm i\sqrt{11}}{6} = -\frac{1}{6} \pm i\frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$y_0(x) = c_1 e^{-\frac{1}{6}x}\cos\left(\frac{\sqrt{11}}{6}x\right) + c_2 e^{-\frac{1}{6}x}\sin\left(\frac{\sqrt{11}}{6}x\right)$$

2) Cerchiamo $\bar{y}$

$g(x) = 5x e^{2x}$

$\bar{y}(x) = (Ax+B)e^{2x}$

$\bar{y}'(x) = Ae^{2x} + (Ax+B)e^{2x}\cdot 2 = (2Ax + A + 2B)e^{2x}$

$\bar{y}''(x) = 2Ae^{2x} + (2Ax + A + 2B)e^{2x}\cdot 2$

$= e^{2x}(2A + 4Ax + 2A + 4B)$

$= 4e^{2x}(Ax + A + B)$

Sostituiamo nell' eq. $3\bar{y}'' + \bar{y}' + \bar{y} = 5xe^{2x}$

$12\cancel{e^{2x}}(Ax+A+B) + (2Ax+A+2B)\cancel{e^{2x}} + (Ax+B)\cancel{e^{2x}} = 5x\cancel{e^{2x}}$

$12Ax + 12A + 12B + 2Ax + A + 2B + Ax + B = 5x$

$15Ax + 13A + 15B = 5x$

$$\begin{cases} 15A = 5 \\ 13A + 15B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = -\frac{13}{15}A = -\frac{13}{45} \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = \left(\frac{1}{3} x - \frac{13}{45} \right) e^{2x}$$

Conclusione: la soluzione generale è

$$y(x) = \left(\frac{1}{3} x - \frac{13}{45} \right) e^{2x} + C_1 e^{-\frac{1}{6}x} \cos\left(\frac{\sqrt{11}}{6} x \right) + C_2 e^{-\frac{1}{6}x} \sin\left(\frac{\sqrt{11}}{6} x \right)$$

<u>ESEMPIO</u>

$$y'' - 2y' + y = x e^{x}$$

1) $y'' - 2y' + y = 0$

Eq. caratteristica: $(\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

$y_0(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{x} x$

2) Cerchiamo $\bar{y}$:

$g(x) = x e^{x}$

$\bar{y}(x) = (Ax + B) e^{x} x^2 = (Ax^3 + Bx^2) e^{x}$

Conti .... $A = \frac{1}{6}$, $B = 0$

Conclusione: $y(x) = \frac{1}{6} x^3 e^{x} + C_1 e^{x} + C_2 e^{x} x$.