LEZIONE 34

mercoledì 14 dicembre 2022 09:06

Equazioni differenziali ordinarie

- $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$
- Una SOLUZIONE è una funzione $y: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo tale $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$.
- SOLUZIONE GENERALE: insieme di tutte le soluzioni.
- Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Questi problemi hanno (sotto opportune ipotesi) un'unica soluzione.

- EQUAZIONI INTEGRABILI: $y^{(n)} = f(x)$
- EQUAZIONI LINEARI DI I ORDINE: $y'(x) = a(x)y + g(x)$.

Equazioni di I ordine a variabili separabili:

$$y' = a(x)\, b(y).$$

Notazioni:

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, denotiamo:

$C(I) := \{ f: I \to \mathbb{R} \mid f \text{ è continua in } I \}$

$C'(I) = \{ f: I \to \mathbb{R} \mid f \text{ è derivabile con derivata continua in } I \}$

$C^k(I) = \{ f: I \to \mathbb{R},\ f\ k \text{ volte derivabile con } f^{(k)} \text{ è continua} \}$

TEOREMA (DI ESISTENZA E UNICITÀ PER EQ. A VARIABILI SEPARABILI)

Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ due intervalli aperti. Siano $a \in C(I)$, $b \in C^1(I)$. Siano $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$. Allora $\exists\, I_0 \subseteq I$ ed esiste un'unica funzione $y : I_0 \longrightarrow J$ ($y \in C^1(I_0)$) tale che

$$\begin{cases} y' = a(x)\, b(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Idea per risolvere l'equazione:

$$y'(x) = a(x)\, b(y).$$

$$\frac{y'}{b(y)} = a(x)$$

cioè $\dfrac{y'(x)}{b(y(x))} = a(x)$

Integriamo: $\displaystyle\int \frac{y'(x)}{b(y(x))}\, dx = \int a(x)\, dx$

Si calcolano i due integrali:

$$\int a(x)\, dx = A(x) + c_1$$

$$\int \frac{y'(x)}{b(y(x))}\, dx \overset{t = y(x)}{=} \int \frac{1}{b(t)}\, dt = B(t) + C_2 = B(y(x)) + C_2$$

dove B è una primitiva di $\frac{1}{b}$.

Allora

$$B(y(x)) + C_2 = A(x) + C_1$$

$$B(y(x)) = A(x) + C \qquad (\text{dove } C = C_1 - C_2)$$

$$y(x) = B^{-1}(A(x) + C).$$

Attenzione:

1) Dividiamo per $h(y(x))$. Questo procedimento funziona solo per trovare le soluzioni per cui si ha $h(y(x)) \neq 0 \quad \forall x$.

2) Bisogna invertire B.

OSS:

Sia y una soluzione di $y' = a(x)\,h(y)$. Se $\exists\, x_0 \in I$ tale che $h(y(x_0)) = 0$. Allora $y(x) = y(x_0)$ $\forall x \in I$.

DIM

Sia $y_0 = 0$. La funzione costante $y(x) = y_0$ è soluzione dell'equazione infatti: $(y_0)' = 0$ e $a(x)\,h(y_0) = a(x)\,h(y(x_0)) = 0$.
Allora y_0 e $y(x)$ sono due soluzioni del problema

$$\begin{cases} y' = a(x)\,h(y) \\ y(x_0) = y_0 . \end{cases}$$

Ma il problema ha un'unica soluzione. Quindi $y(x) = y_0 \quad \forall x$ in cui $y(x)$ è definita.

Riassumendo:
L'equazione $y' = a(x)\,h(y)$ può avere:

- soluzioni costanti: $y(x) = y_0$ dove $h(y_0) = 0$.
- Soluzioni per cui $h(y(x)) \neq 0 \ \forall x$. Queste si trovano con il metodo precedente.

ESEMPIO 1

$$y' = x y^2$$

È un' eq. a variabili separabili con
$a(x) = x$ e $b(y) = y^2$.

- Cerchiamo le soluzioni costanti: $b(y) = 0$
  $y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$.
  $y(x) = 0$ è l'unica soluzione costante.

- Cerchiamo le altre soluzioni:

$$y' = x\, y^2$$

$$\frac{y'}{y^2} = x \Rightarrow \int \frac{y'(x)}{y(x)^2}\, dx = \int x\, dx.$$

Calcoliamo i due integrali:

$$\int x\, dx = \frac{1}{2} x^2 + c_1$$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)^2}\, dx \overset{t = y(x)}{=} \int \frac{1}{t^2}\, dt = -\frac{1}{t} + c_2$$

$$= -\frac{1}{y(x)} + c_2$$

$$-\frac{1}{y(x)} = \frac{1}{2} x^2 + c$$

$$\frac{1}{y(x)} = -\left(\frac{1}{2} x^2 + c\right)$$

$$y(x) = -\frac{1}{\frac{1}{2} x^2 + c}.$$

Soluzione generale:

$$y(x) = -\frac{1}{\frac{1}{2} x^2 + c} \quad \vee \quad y(x) = 0.$$

Commento:

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)^2}\,dx$$ molto spesso la sostituzione si scrive come $y = y(x)$

$$\| $$

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy$$

Quindi l'eguaglianza: $\displaystyle\int \frac{y'(x)}{y(x)^2}\,dx = \int x\,dx$

si riscrive come $\displaystyle\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int x\,dx$.

In generale: $\displaystyle\frac{y'}{b(y)} = a(x) \implies \int \frac{1}{b(y)}\,dy = \int a(x)\,dx$

In pratica: $y' = a(x)\,b(y) \iff \dfrac{dy}{dx} = a(x)\,b(y)$

$$\iff \frac{dy}{b(y)} = a(x)\,dx$$

$$\implies \int \frac{dy}{b(y)} = \int a(x)\,dx.$$

ESEMPIO 2

$$y' = \frac{(y-1)^4}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1}(y-1)^4$$

È un'eq. a variabili separabili.

$$a(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad b(y) = (y-1)^4.$$

- Cerchiamo le soluzioni costanti: $(y-1)^4 = 0$.

$|y-1| = 0 \iff y-1 = 0 \iff y = 1.$

La funzione $y(x) = 1$ è l'unica soluzione costante.

· Cerchiamo le altre soluzioni:

$$y' = \frac{(y-1)^4}{1+x^2} \iff \frac{y'}{(y-1)^4} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\int \frac{dy}{(y-1)^4} = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C_1$$

$$\int \frac{1}{(y-1)^4}\,dy = -\frac{1}{3}(y-1)^{-3} + C_2$$

$$\left(\int \frac{1}{y^4}\,dy = -\frac{1}{3}y^{-3} + c \right)$$

$$\left(\int \frac{1}{(2x+1)^4}\,dx = -\frac{1}{3}(2x+1)^{-3} \cdot \frac{1}{2} + c \right)$$

Quindi:

$$-\frac{1}{3}(y(x)-1)^{-3} = \arctan x + C$$

$$(y(x)-1)^{-3} = -(3\arctan x + 3C)$$

$$(y(x)-1)^3 = -\frac{1}{3\arctan x + 3C}$$

$$y(x) - 1 = -\frac{1}{\sqrt[3]{3\arctan x + 3C}}$$

$$y(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{3\arctan x + 3C}}$$

Soluzione generale:

$$y(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{3\arctan x + 3C}} \quad \vee \quad y(x) = 1$$

<u>ESEMPIO 3</u>

$$y' = \frac{\cos(2x)}{y} = \cos(2x) \cdot \frac{1}{y}.$$

Variabili separabili in cui: $a(x) = \cos(2x)$ $b(y) = \frac{1}{y}$.

• Soluzioni costanti: $\frac{1}{y} = 0$ MAI

Non ci sono soluzioni costanti.

• Cerchiamo le altre soluzioni.

$$y' = \frac{\cos(2x)}{y}$$

$$y\,y' = \cos(2x)$$

$\int y\,dy = \int \cos(2x)\,dx$. Calcoliamo gli integrali.

$$\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\sin(2x) + C_1$$

$$\int y\,dy = \frac{1}{2}y^2 + c_2$$

Quindi:

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}\sin(2x) + C$$

$$y^2 = \sin(2x) + 2C$$

$$|y| = \sqrt{\sin(2x) + 2C}$$

$$y = \sqrt{\sin(2x) + 2C} \quad \vee \quad y = -\sqrt{\sin(2x) + 2C}$$

$\left(\sqrt{x^2} = |x| \quad \sqrt[n]{x^n} = |x| \text{ se } n \text{ è pari} \right)$

Soluzione generale:

$$y(x) = \sqrt{\sin(2x) + 2C} \quad \vee \quad y(x) = -\sqrt{\sin(2x) + 2C}.$$

ESEMPIO:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\cos(2x)}{y} \\ y(0) = -2. \end{cases}$$

Abbiamo già trovato la soluzione generale.

Poiché $y(0) = -2$. Sappiamo che $y(x) = -\sqrt{\sin(2x) + 2C}$

Determiniamo C:

$$-2 = -\sqrt{\sin 0 + 2c} \iff -2 = -\sqrt{2c}$$
$$\iff 2 = \sqrt{2c} \iff 2c = 4$$
$$\iff c = 2.$$

L'unica soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = -\sqrt{\sin(2x) + 4}\,.$$

ESEMPIO 5

$$\begin{cases} y' = e^{3x} \sin y \\ y(0) = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Consideriamo l'equazione $y' = e^{3x} \sin y$.

Poiché $\sin \frac{\pi}{2} = 1 \neq 0$. La soluzione che cerchiamo non è costante.

Osservazione: $y(x) = 0$ e $y(x) = \pi$ sono soluzioni dell'equazione (non del problema di Cauchy). Poiché $y(0) = \frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$. Possiamo dire che $y(x) \in (0, \pi)$ $\forall x$ per cui $y(x)$ è definita.

Risolviamo l'equazione:

$$y' = e^{3x} \sin y$$

$$\frac{y'}{\sin y} = e^{3x} \Rightarrow \int \frac{1}{\sin y}\, dy = \int e^{3x}\, dx$$

$$\int e^{3x}\, dx = \frac{1}{3} e^{3x} + c_1$$

$$\int \frac{1}{\sin y}\, dy \qquad t = \tan\frac{y}{2} \qquad \sin y = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dy = \frac{2}{1+t^2}\, dt$$

$$= \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{\cancel{1+t^2}}{\cancel{2}t} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{1+t^2}}\, dt =$$

$$= \int \frac{1}{t}\, dt = \log|t| + c_2$$
$$= \log\left|\tan\frac{y}{2}\right| + c_2$$

Quindi:

$$\log\left|\tan\frac{y}{2}\right| = \frac{1}{3}e^{3x} + C.$$

Conviene trovare C subito usando $y(0) = \frac{\pi}{2}$.

$$\log\left|\tan\frac{\pi}{4}\right| = \frac{1}{3}e^{0} + C$$
$$0 = \frac{1}{3} + C \implies C = -\frac{1}{3}.$$

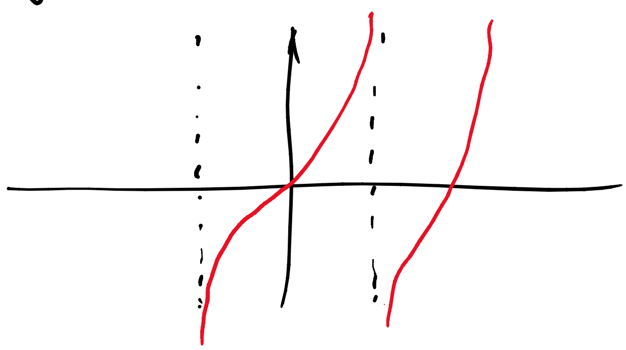
Quindi:

$$\log\left|\tan\frac{y}{2}\right| = \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}$$
$$\left|\tan\frac{y}{2}\right| = e^{\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}}$$
$$\tan\frac{y}{2} = \pm e^{\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}}.$$

Per scegliere il segno giusto si usa di nuovo la condizione iniziale. $y(0) = \frac{\pi}{2}$

$1 = \pm 1$ il segno giusto è $+$.

$$\tan\frac{y}{2} = e^{\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}}$$



Sappiamo che $y \in (0, \pi)$.
Quindi $\frac{y}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$. Quindi

$$\frac{y}{2} = \arctan\left(e^{\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}}\right)$$
$$y(x) = 2\arctan\left(e^{\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}}\right).$$

OSS

Le equazioni lineari omogenee $y'(x) = a(x)\, y$ sono anche equazioni a variabili separabili ($b(y) = y$).

ESEMPIO 6

$$y' = x\,y$$

È sia un' equazione lineare omogenea che un' eq. a variabili separabili: $a(x) = x$, $b(y) = y$.

- Risolvendo come eq lineare:

  $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + c$. Scelgo $A(x) = \frac{1}{2}x^2$.

  La soluzione è $y(x) = K e^{\frac{1}{2}x^2}$ con $K \in \mathbb{R}$.

- Risolvere con il metodo delle variabili separabili è più complicato:

  $y' = x\,y$.

  Soluzioni costanti: $y(x) = 0$.

  Altre soluzioni:

$$\frac{y'}{y} = x \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int x\,dx$$

$$\log|y| = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

$$|y| = e^{\frac{1}{2}x^2 + C} = e^c e^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$y = \pm e^c e^{\frac{1}{2}x^2}$$

Soluzione generale è:

$$y(x) = \underbrace{e^c}_{\substack{\shortparallel \\ K>0}} e^{\frac{1}{2}x^2} \ \vee \ y(x) = \underbrace{-e^c}_{\substack{\shortparallel \\ K<0}} e^{\frac{1}{2}x^2} \ \vee \ y(x) = 0. \ \ (K=0)$$

Le soluzioni sono del tipo $y(x) = K e^{\frac{1}{2}x^2}$ con $K \in \mathbb{R}$.

ESEMPIO 7

$$\begin{cases} x y' + y^3 = 0 \\ y(-1) = 0 . \end{cases}$$

Guardiamo l'equazione $x y' + y^3 = 0$

$$x y' = -y^3 \iff y' = -\frac{y^3}{x} = \frac{1}{x} \cdot (-y^3)$$

è un'eq. a variabili separabili in cui:

$a(x) = \frac{1}{x}$ e $b(y) = -y^3$.

$b(0) = 0$. La soluzione che cerchiamo è $y(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

ESEMPIO 8

$$\begin{cases} x y' + y^3 = 0 \\ y(-1) = 1 \end{cases}$$

$y' = \frac{1}{x}(-y^3)$ $\qquad a(x) = \frac{1}{x}$, $b(y) = -y^3$.

$b(1) = -1 \neq 0$. La soluzione che cerchiamo non è costante.

$$\frac{y'}{-y^3} = \frac{1}{x} \implies -\int \frac{1}{y^3} dy = \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C_1$$

$$-\int \frac{1}{y^3} dy = \frac{1}{2} y^{-2} + C_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{y^2} + C_2 .$$

Quindi: $\frac{1}{2} \frac{1}{y^2} = \log|x| + C$.

Determiniamo C imponendo $y(-1) = 1$

$$\frac{1}{2} = \log|-1| + C \iff C = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{y^2} = \log|x| + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{y^2} = 2\log|x| + 1$$

$$y^2 = \frac{1}{2\log|x|+1}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{2\log|x|+1}}$$

$$: \quad y(-1) = 1 > 0$$

quindi $y(x) = \sqrt{\dfrac{1}{2\log|x|+1}}$.

ESEMPIO 8

$$\begin{cases} y\,y'\cos x = \tan x \\ y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1 \end{cases}$$

$$y\,y' = \frac{\tan x}{\cos x} \qquad \left(y' = \frac{1}{y}\,\frac{\tan x}{\cos x} \qquad \begin{array}{l} a(x) = \dfrac{\tan x}{\cos x} \\ b(y) = \dfrac{1}{y} \end{array} \right)$$

$b(-1) = -1 \neq 0$. La sol.. del problema non è costante.

$$\int y\,dy = \int \frac{\tan x}{\cos x}\,dx$$

$$\int y\,dy = \frac{1}{2}y^2 + c_1$$

$$\int \frac{\tan x}{\cos x}\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx \qquad \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x\,dx \end{array}$$

$$= -\int \frac{1}{t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{t} + c_2 = \frac{1}{\cos x} + c_2$$

Quindi

$$\frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{\cos x} + C$$

Determiniamo C: $\quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$

$$\frac{1}{2} = 2 + C \Rightarrow C = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{\cos x} - \frac{3}{2} \Rightarrow y^2 = \frac{2}{\cos x} - 3$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{\cos x} - 3}$$

Poiché $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1 < 0$, $\quad y(x) = -\sqrt{\frac{2}{\cos x} - 3}$.