

Integrali impropri

Definizione Sia $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ con $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Diciamo che f ammette integrale in senso improprio in $[a, b)$ se

• $\forall c \in (a, b)$: f è integrabile $[a, c]$

• $\exists \lim_{c \rightarrow b} \int_a^c f(x) dx \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

[il limite va inteso come segue
se $b \in \mathbb{R}$ allora $c \rightarrow b^-$
se $b = +\infty$ allora $c \rightarrow +\infty$]

In tal caso si usa la notazione

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b} \int_a^c f(x) dx$$

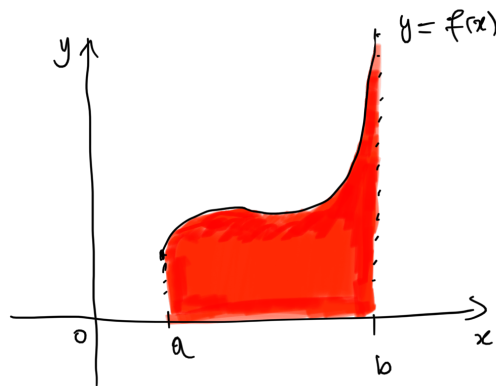
① Si dice che f è INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO in $[a, b)$ oppure che $\int_a^b f(x) dx$ è CONVERGENTE se $\int_a^b f(x) dx \in \mathbb{R}$

② Si dice che $\int_a^b f(x) dx$ è DIVERGENTE POSITIVAMENTE se $\int_a^b f(x) dx = +\infty$

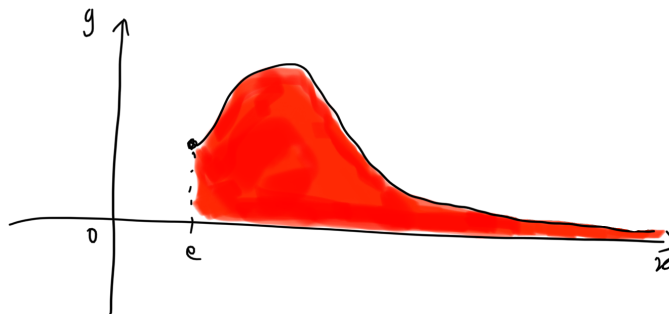
③ Si dice che $\int_a^b f(x) dx$ è DIVERGENTE NEGATIVAMENTE se $\int_a^b f(x) dx = -\infty$

④ Se $\nexists \lim_{c \rightarrow b} \int_a^c f(x) dx$ si dice $\int_a^b f(x) dx$ è INDEFINITO

Se $b \in \mathbb{R}$



Se $b = +\infty$



Definizione Sia $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$

Diciamo che f ammette integrale in senso improprio in $(a, b]$ se

- $\forall c \in (a, b)$: f è integrabile $[c, b]$
- $\exists \lim_{c \rightarrow a} \int_c^b f(x) dx \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ $\left[\begin{array}{l} \text{il limite va inteso come segue} \\ \text{se } a \in \mathbb{R} \text{ allora } c \rightarrow a^+ \\ \text{se } a = -\infty \text{ allora } c \rightarrow -\infty \end{array} \right]$

Un tal caso si usa la notazione

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a} \int_c^b f(x) dx$$

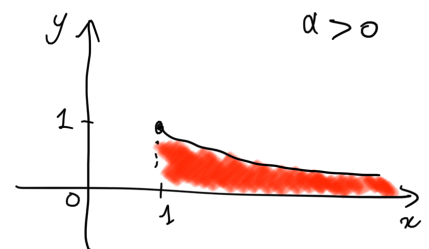
e vale lo stesso tipo di raccomandazione ①, ②, ③, ④ usate nella definizione precedente

Esempi

1) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ allora

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ è convergente per $\alpha > 1$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ è divergente positivamente per $\alpha \leq 1$

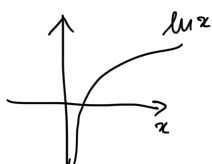


Se $\alpha \neq 1$

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx &= \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^c \\ &= \lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} (c^{1-\alpha} - 1) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Se $\alpha = 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c \frac{1}{x} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \left[\ln|x| \right]_1^c = \lim_{c \rightarrow +\infty} \ln c = +\infty$$



2) Sia $a \in \mathbb{R}$

$\int_0^{+\infty} e^{ax} dx$ è convergente per $a < 0$

$\int_0^{+\infty} e^{ax} dx$ è divergente positivamente per $a \geq 0$

$a \neq 0$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{ax} dx &= \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c e^{ax} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{a} e^{ax} \right]_0^c \\ &= \lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{1}{a} (e^{ac} - 1) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ -\frac{1}{a} & \text{se } a < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

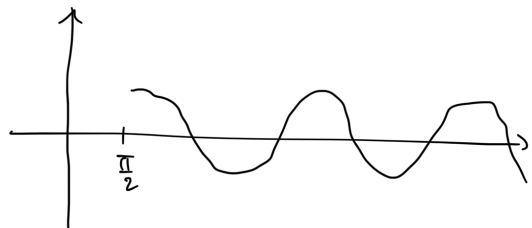
$a = 0$

$$\int_0^{+\infty} 1 dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c 1 dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} [x]_0^c = \lim_{c \rightarrow +\infty} c = +\infty$$

$$\begin{aligned} 3) \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \sin x dx &= \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^c \sin x dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} [-\cos x]_{\frac{\pi}{2}}^c \\ &= \lim_{c \rightarrow +\infty} (-\cos c + \cos \frac{\pi}{2}) = \lim_{c \rightarrow +\infty} -\cos c \end{aligned}$$

questo limite non esiste

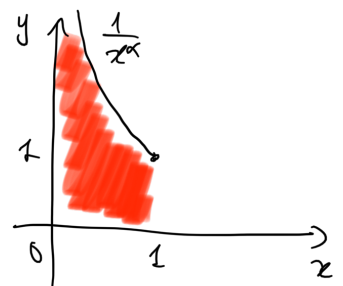
quindi $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \sin x dx$ è improprio



4) Sia $\alpha > 0$ allora

$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ è convergente per $\alpha \in (0, 1)$

$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ è divergente positivamente per $\alpha \geq 1$



$\alpha \neq 1$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_c^1$$

$$= \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-\alpha} (1 - c^{1-\alpha}) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\alpha = 1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} [\ln(x)]_c^1 = \lim_{c \rightarrow 0^+} -\ln c = +\infty$$

Definizione Sia $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ con $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Diciamo che f ammette integrale in senso improprio in (a,b) se

- $\forall \alpha, \beta \in (a,b)$ con $\alpha < \beta$: f è integrabile in $[\alpha, \beta]$
- $\exists c \in (a,b)$ tale che f è integrabile in senso improprio sia in $[a, c]$ che in $[c, b)$

Un tel con ci pare
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

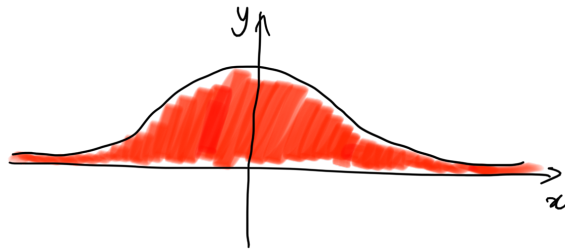
Osservazione la definizione precedente è indipendente dal punto c

Esempi

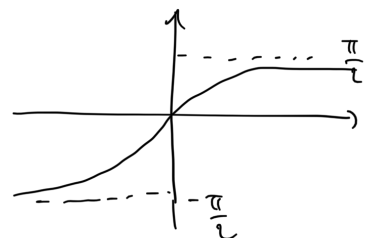
$$1) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = +\infty$$

$\uparrow$ per $\alpha < 1$ è convergente $\uparrow$ per $\alpha > 1$ è convergente

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$



$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} [\arctg x]_c^0 \\ &= \lim_{c \rightarrow -\infty} (\arctg 0 - \arctg c) = \lim_{c \rightarrow -\infty} -\arctg c \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

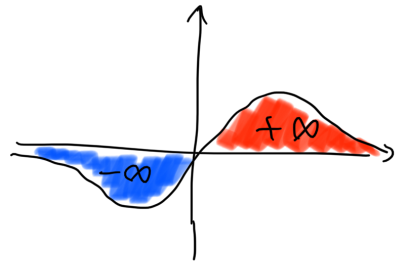


$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} [\arctan x]_0^c \\ &= \lim_{c \rightarrow +\infty} (\arctan c - \arctan 0) = \lim_{c \rightarrow +\infty} \arctan c = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Conclusion

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$3) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$$



$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c \frac{x}{1+x^2} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$

$$= \lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln(1+c^2) = +\infty$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^2} dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^0 \frac{x}{1+x^2} dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_c^0$$

$$= \lim_{c \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2} \ln(1+c^2) = -\infty$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx \quad \text{e' indifinito}$$

Teorema (CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO)

Siano $f, g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ con $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Supponiamo che

- $\forall c \in (a, b)$: f, g sono integrabili in $[a, c]$

- $f(x), g(x) \geq 0$ definitivamente per $x \rightarrow b$

- $\exists \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ e $l \in (0, +\infty)$

Allora

- $\int_a^b f(x) dx$ è convergente $\Leftrightarrow \int_a^b g(x) dx$ è convergente

- $\int_a^b f(x) dx$ è divergente positivamente $\Leftrightarrow \int_a^b g(x) dx$ è divergente positivamente

Esempio $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+x^2}} dx$

Per $x \rightarrow +\infty$

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x^2} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} + o\left(\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\right)$$

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+x^2}} \quad g(x) = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

$$\int_1^{+\infty} g(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} dx \quad \alpha = \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} g(x) dx = +\infty$$

Per il criterio del confronto asintotico anche $\int_1^{+\infty} f(x) dx = +\infty$

Teorema (CRITERIO DEL CONFRONTO)

Siano $f, g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ con $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tali che

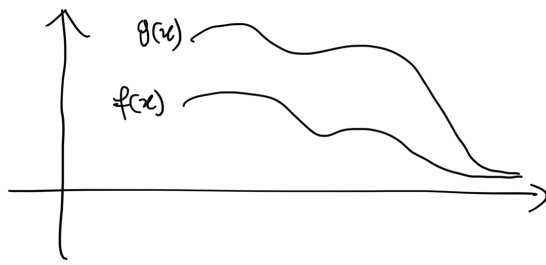
- $\forall c \in (a, b)$: f, g sono integrabili in $[a, c]$

- $0 \leq f(x) \leq g(x)$ definitivamente per $x \rightarrow b$

Allora

① $\int_a^b g(x) dx$ è convergente $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx$ è convergente

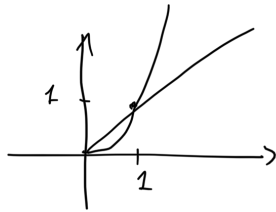
② $\int_a^b f(x) dx$ è divergente positivamente $\Rightarrow \int_a^b g(x) dx$ è divergente positivamente



Es. sempre

1) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ è convergente

$$x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq x \Rightarrow -x^2 \leq -x \Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-x}$$



$e^{-x^2} \leq e^{-x}$ definitivamente per $x \rightarrow +\infty$ (l'intervallo di $+\infty$ è $x \geq 1$)

$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ è convergente (vedi Esercizio 2 con $a = -1$)

$\Rightarrow$ per il criterio del confronto $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ è convergente

2) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x} (2 + \cos x) dx$ è divergente positivamente

Osserviamo che la funzione integranda è strettamente positiva in $[2, +\infty)$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 \leq 2 + \cos x \leq 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} (2 + \cos x) \quad \forall x > 0$$

definiamo $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \frac{1}{x} (2 + \cos x)$

$$\int_2^{+\infty} f(x) dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_2^c \frac{1}{x} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \left[\ln|x| \right]_2^c = \lim_{c \rightarrow +\infty} \ln \frac{c}{2} = +\infty$$

$\Rightarrow$ per il criterio del confronto $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x} (2 + \cos x) dx = \int_2^{+\infty} g(x) dx = +\infty$

Esercizi di preparazione all' esame scritto

Es I) a) Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{3x-2}{4x^2-1} dx$

b) Calcolare l'integrale $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x (3 \cos x - 2)}{4 \cos^2 x - 1} dx$

Svolgimento: a) Siamo nel caso $\Delta > 0$

Fattorizziamo il denominatore come segue $4x^2-1 = 4(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})$

Determiniamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{3x-2}{4x^2-1} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{2x-1} = \frac{A(2x-1) + B(2x+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{2(A+B)x - A + B}{(2x+1)(2x-1)}$$

$$\begin{cases} 3 = 2(A+B) \\ -2 = -A+B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(B+2+B) = 3 \\ A = B+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4(B+1) = 3 \\ A = B+2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B = -\frac{1}{4} \\ A = \frac{7}{4} \end{cases}$$

$$\int \frac{3x-2}{4x^2-1} dx = \int \left(\frac{\frac{7}{4}}{2x+1} + \frac{-\frac{1}{4}}{2x-1} \right) dx$$

$$= \frac{7}{4} \int \frac{dx}{2x+1} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{2x-1}$$

$$= \frac{7}{8} \int \frac{2}{2x+1} dx - \frac{1}{8} \int \frac{2}{2x-1} dx$$

$$= \frac{7}{8} \ln|2x+1| - \frac{1}{8} \ln|2x-1| + c$$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x (3 \cos x - 2)}{4 \cos^2 x - 1} dx = - \int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{3t-2}{4t^2-1} dt$

cambio di variabili $t = \cos x$
 $dt = -\sin x dx$
 $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $x = 0 \Rightarrow t = \cos 0 = 1$

$$= \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \frac{3t-2}{4t^2-1} dt = \left[\frac{7}{8} \ln|2t+1| - \frac{1}{8} \ln|2t-1| \right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1$$

$$= \frac{7}{8} \ln 3 - \frac{7}{8} \ln(\sqrt{3}+1) + \frac{1}{8} \ln(\sqrt{3}-1)$$

Es II) a) Calcolo l'integrale indefinito $\int \frac{2x+1}{3x^2+1} dx$

b) Calcolo l'integrale $\int_1^e \frac{2 \log x + 1}{x(3 \log^2 x + 1)} dx$

Sussidiamente : a) $\Delta < 0$

$$3x^2+1 = (\sqrt{3}x)^2+1$$

Determiniamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{2x+1}{3x^2+1} = \frac{A \cdot (6x) + B}{3x^2+1} = \frac{6Ax+B}{3x^2+1} = A \frac{6x}{3x^2+1} + B \frac{1}{3x^2+1}$$

$$\begin{cases} 6A = 2 \\ B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{3x^2+1} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{6x}{3x^2+1} dx + \int \frac{1}{3x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln(3x^2+1) + \int \frac{1}{(\sqrt{3}x)^2+1} dx = \frac{1}{3} \ln(3x^2+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3}x)^2+1} dx \end{aligned}$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2} dx = \arctan f(x) + C$$

$$= \frac{1}{3} \ln(3x^2+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3}x) + C$$

$$b) \int_1^e \frac{2 \log x + 1}{x(3 \log^2 x + 1)} dx \stackrel{\uparrow}{=} \int_0^1 \frac{2t+1}{3t^2+1} dt = \left[\frac{1}{3} \log(3t^2+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3}t) \right]_0^1$$

$$t = \log x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$$

$$x = e \Rightarrow t = \log e = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow t = \log 1 = 0$$

$$= \frac{1}{3} \log 4 + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3}) - \frac{1}{3} \log 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan 0$$

$$= \frac{2}{3} \log 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Es III) a) Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{x}{x^2+2x+5} dx$

b) Calcolare l'integrale $\int_{-1}^1 \frac{x^5}{x^6+2x^3+5} dx$

Analizziamo: c) $\Delta = 4 - 4 \cdot 5 < 0$

Più precisamente il denominatore con il metodo di completamento dei quadrati

$$\begin{aligned} x^2+2x+5 &= x^2+2x+1+4 = (x+1)^2+4 = 4 \left[\frac{(x+1)^2}{4}+1 \right] \\ &= 4 \left[\left(\frac{x+1}{2} \right)^2+1 \right] \end{aligned}$$

$$\frac{x}{x^2+2x+5} = \frac{A(2x+2)+B}{x^2+2x+5} = \frac{2Ax+2A+B}{x^2+2x+5}$$

risolviamo il seguente sistema

$$\begin{cases} 2A=1 \\ 2A+B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-2A=-1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2+2x+5} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx - \int \frac{1}{x^2+2x+5} dx \\ &= \frac{1}{2} \log(x^2+2x+5) - \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \log(x^2+2x+5) - \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \log(x^2+2x+5) - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + c \end{aligned}$$

$$b) \int_{-1}^1 \frac{x^5}{x^6+2x^3+5} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{3} \frac{x^3 \cdot 3x^2}{x^6+2x^3+5} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{3} \frac{t}{t^2+2t+5} dt$$

cambio di variabile $t=x^3 \Rightarrow dt=3x^2 dx$
 $t=g(x) \Rightarrow dt = \frac{dg}{dx} dx$

$$x=1 \Rightarrow t=1$$

$$x=-1 \Rightarrow t=-1$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \frac{t}{t^2+2t+5} dt = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \log(t^2+2t+5) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{t+1}{2}\right) \right]_{-1}^1 \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \log 8 - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2} \log 4 + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 0 \right) \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} (\log 8 - \log 4) - \frac{\pi}{8} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \log 2 - \frac{\pi}{8} \right)
\end{aligned}$$

Es IV) a) Calcolare l'integrale improprio $\int \frac{x}{2x^2-x-1} dx$
b) Calcolare l'integrale $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{2x-\sqrt{x}-1}$

Svolgimento: a) $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$

Le radici reali del denominatore sono $x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4} < \frac{1}{2}$

Fattorizziamo il denominatore

$$2x^2-x-1 = 2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1) = (2x+1)(x-1)$$

Determiniamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali da

$$\frac{x}{2x^2-x-1} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + B(2x+1)}{(2x+1)(x-1)} = \frac{(A+2B)x - A+B}{(2x+1)(x-1)}$$

$$\begin{cases} A+2B = 1 \\ -A+B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3A = 1 \\ A=B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{2x^2-x-1} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{2x+1} dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-1} dx \\
&= \frac{1}{6} \log|2x+1| + \frac{1}{3} \log|x-1| + C
\end{aligned}$$

$$b) \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{2x-\sqrt{x}-1} \stackrel{\uparrow}{=} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2t^2-t-1} \cdot 2t dt = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{2t^2-t-1} dt$$

$$t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2 \quad \text{in particolare} \quad dx = 2t dt$$

$$\begin{aligned}
x = \frac{1}{4} &\Rightarrow t = \frac{1}{2} \\
x = 0 &\Rightarrow t = 0
\end{aligned}$$

$$= 2 \left[\frac{1}{6} \log|2t+1| + \frac{1}{3} \log|t-1| \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2 \left(\frac{1}{6} \log 2 - \frac{1}{3} \log 2 \right) = -\frac{1}{3} \log 2$$

Esercizi funzioni razionali

$$1) \int \frac{3(x^8 + 3x^5 + 4x^2)}{x^9 + 6x^6 + 12x^3 + 8} dx = \int \frac{3x^2(x^6 + 3x^3 + 4)}{x^9 + 6x^6 + 12x^3 + 8} dx$$

$$\stackrel{1}{=} \int \frac{t^2 + 3t + 4}{t^3 + 6t^2 + 12t + 8} dt = \int \frac{t^2 + 3t + 4}{(t+2)^3} dt$$

$$t = x^3 \quad dt = 3x^2 dx$$

cerchiamo $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{t^2 + 3t + 4}{(t+2)^3} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{(t+2)^2} + \frac{C}{(t+2)^3} = \frac{A(t+2)^2 + B(t+2) + C}{(t+2)^3}$$

$$= \frac{A(t^2 + 4t + 4) + B(t+2) + C}{(t+2)^3}$$

$$= \frac{At^2 + (4A+B)t + 4A+2B+C}{(t+2)^3}$$

$$\begin{cases} A=1 \\ 4A+B=3 \\ 4A+2B+C=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=3-4A=-1 \\ C=4-4A-2B=4-4+2=2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2 + 3t + 4}{(t+2)^3} dt &= \int \frac{1}{t+2} dt - \int \frac{1}{(t+2)^2} dt + 2 \int \frac{1}{(t+2)^3} dt \\ &= \log|t+2| + \frac{1}{t+2} - \frac{1}{2(t+2)^2} + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{3(x^8 + 3x^5 + 4x^2)}{x^9 + 6x^6 + 12x^3 + 8} dx = \log|x^3+2| + \frac{1}{x^3+2} - \frac{1}{2(x^3+2)^2} + C$$

$$2) \int \frac{x^4 + x^3 + 4x^2 + 2x + 3}{x^5 + x^3} dx$$

Factorizziamo il denominatore

$$x^5 + x^3 = x^3(x^2 + 1)$$

Determinare $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{aligned} \frac{x^4 + x^3 + 4x^2 + 2x + 3}{x^5 + x^3} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D(2x) + E}{x^2 + 1} \\ &= \frac{Ax^2(x^2 + 1) + Bx(x^2 + 1) + C(x^2 + 1) + 2Dx \cdot x^3 + Ex^3}{x^3(x^2 + 1)} \\ &= \frac{(A + 2D)x^4 + (B + E)x^3 + (A + C)x^2 + Bx + C}{x^3(x^2 + 1)} \end{aligned}$$

Risoluiamo quindi il sistema

$$\begin{cases} A + 2D = 1 \Rightarrow D = \frac{1-A}{2} = 0 \\ B + E = 1 \Rightarrow E = 1 - B = -1 \\ A + C = 4 \Rightarrow A = 4 - C = 1 \\ B = 2 \\ C = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \\ C = 3 \\ D = 0 \\ E = -1 \end{cases}$$

$$\int \frac{x^4 + x^3 + 4x^2 + 2x + 3}{x^5 + x^3} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx$$

$$= \int \frac{1}{x} dx + 2 \int \frac{1}{x^2} dx + 3 \int \frac{1}{x^3} dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \log|x| - \frac{2}{x} - \frac{3}{2x^2} - \arctan x + C$$