LEZIONE 3

lunedì 10 ottobre 2022 08:40

Polinomi: Sono oggetti del tipo:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

con $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Equazioni / Disequazioni polinomiali:

Vogliamo risolvere equazioni / disequazioni polinomiali del tipo $p(x) = 0$, $p(x) \geq 0$, $p(x) \leq 0$, $p(x) > 0$ o $p(x) < 0$ dove p è un polinomio

Def Sia $p(x)$ un polinomio, le soluzioni di $p(x) = 0$ si dicono RADICI di $p(x)$.
(cioè una radice di $p(x)$ è un numero $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $p(\alpha) = 0$)

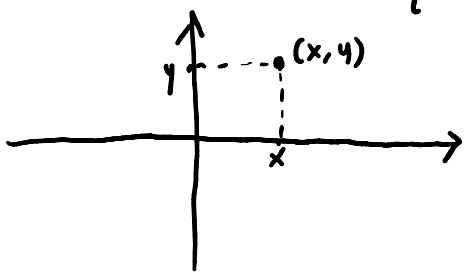
- Polinomi di grado 1: $p(x) = ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Con i polinomi di grado 1 è facile risolvere equazioni e disequazioni:

- $ax + b = 0 \iff ax = -b \iff x = -\frac{b}{a}$
- $ax + b \geq 0 \iff ax \geq -b \iff \begin{cases} x \geq -\frac{b}{a} & \text{se } a > 0 \\ x \leq -\frac{b}{a} & \text{se } a < 0 \end{cases}$

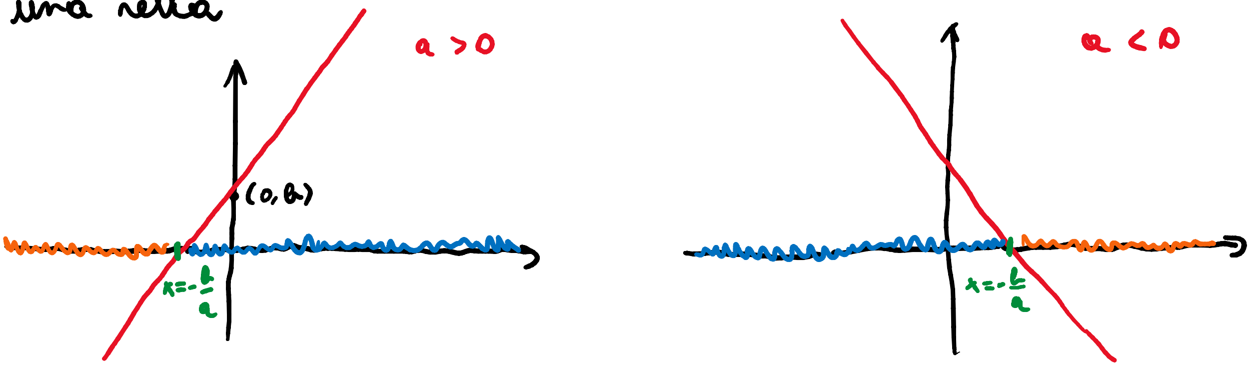
Interpretazione grafica

$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$



Possiamo rappresentare graficamente l'insieme delle coppie (x, y) con $y = ax + b$

Nel caso di polinomi di 1° grado questo insieme è una retta



$x = -\frac{b}{a}$ è la soluzione di $ax + b = 0$

soluzioni di $ax + b > 0$ (se $a > 0$: $x > -\frac{b}{a}$; se $a < 0$: $x < -\frac{b}{a}$)

soluzioni di $ax + b < 0$ (se $a < 0$: $x < -\frac{b}{a}$; se $a > 0$: $x > -\frac{b}{a}$)

Polinomi di 2° grado : $p(x) = ax^2 + bx + c$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

PROPOSIZIONE

Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Consideriamo l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$. Sia $\Delta = b^2 - 4ac$ (DISCRIMINANTE).

Allora:

- Se $\Delta < 0$ l'equazione non ha soluzioni (reali)
- Se $\Delta = 0$ l'equazione ha una sola soluzione $x = -\frac{b}{2a}$
- Se $\Delta > 0$ ci sono due soluzioni : $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

DIM

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$$

$$\iff x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\iff x^2 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

- Se $\Delta < 0$ l'equazione diventa.
  $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} < 0$ l'equazione non ha soluzione.

- Se $\Delta = 0$: $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Longleftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$

- $\Delta > 0$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \vee \quad x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

ESEMPIO

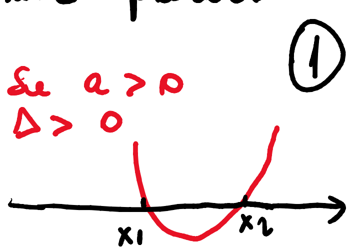
$$2x^2 + x - 3 = 0$$

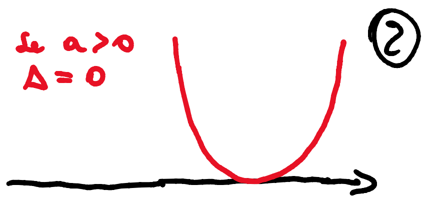
$$\Delta = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25$$

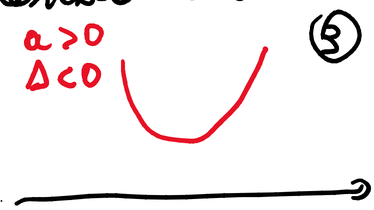
Due soluzioni: $x = \frac{-1 \pm 5}{4} = \begin{cases} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{cases}$

Disequazioni di 2° grado:

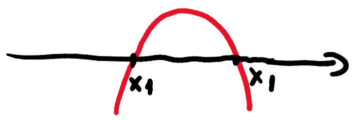
L'equazione $y = ax^2 + bx + c$ rappresenta una parabola la cui concavità dipende da a.



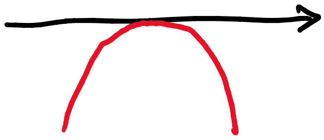




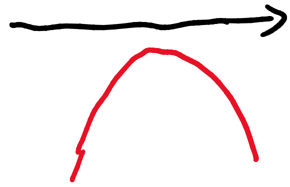
Se $a<0$, $\Delta>0$ (4)



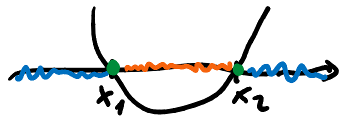
$a<0$, $\Delta=0$ (5)



$a<0$, $\Delta<0$ (6)



Nel caso (1) $(a>0,\ \Delta>0)$:



$ax^2+bx+c \geq 0 \iff x \geq x_2 \lor x \leq x_1$

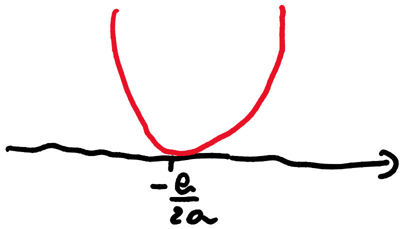
$ax^2+bx+c \leq 0 \iff x_1 \leq x \leq x_2$

$ax^2+bx+c > 0 \iff x < x_1 \lor x > x_2$

$ax^2+bx+c < 0 \iff x_1 < x < x_2$

Attenzione: le conclusioni sono diverse negli altri casi:

Nel caso (2) $(a>0,\ \Delta=0)$



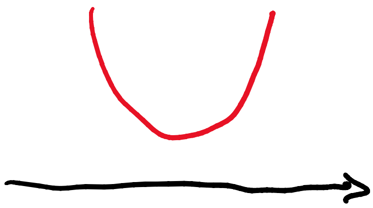
$ax^2+bx+c \geq 0$ è vero $\forall x \in \mathbb{R}$

$ax^2+bx+c > 0 \iff x \neq -\frac{b}{2a}$

$ax^2+bx+c < 0$ no soluzioni

$ax^2+bx+c \leq 0 \iff x = -\frac{b}{2a}$

Nel caso (3) $(a>0,\ \Delta<0)$



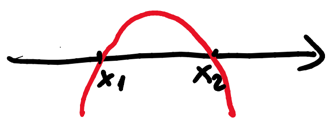
$ax^2+bx+c \geq 0$ è vero $\forall x \in \mathbb{R}$

$ax^2+bx+c > 0$ è vero $\forall x \in \mathbb{R}$

$ax^2+bx+c < 0$ no soluzioni

$ax^2+bx+c \leq 0$ no soluzioni

Nel caso (4) $(a<0,\ \Delta>0)$:



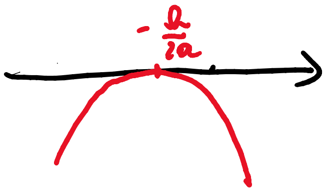
$ax^2+bx+c \geq 0 \iff x_1 \leq x \leq x_2$

$ax^2+bx+c > 0 \iff x_1 < x < x_2$

$ax^2+bx+c \leq 0 \iff x \leq x_1 \lor x \geq x_2$.

$ax^2+bx+c < 0 \iff x < x_1 \lor x > x_2$

Nel caso ⑤ $(a<0,\ \Delta=0)$:



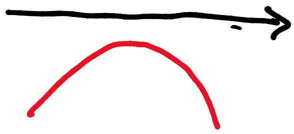
$ax^2+bx+c\geq 0 \iff x=-\frac{b}{2a}$

$ax^2+bx+c>0$ non ha soluzioni

$ax^2+bx+c\leq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$ax^2+bx+c<0 \iff x\neq -\frac{b}{2a}$

Nel caso ⑥ $(a<0,\ \Delta<0)$



$ax^2+bx+c\geq 0$ non ha soluzione

$ax^2+bx+c>0$ non ha soluzione

$ax^2+bx+c\leq 0$ vero $\forall x\in\mathbb{R}$

$ax^2+bx+c<0$ vera $\forall x\in\mathbb{R}$

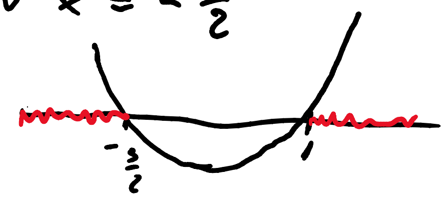
ESEMPI

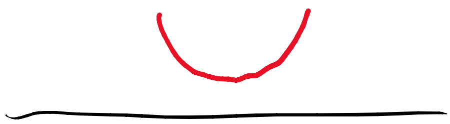
- $2x^2+x-3\geq 0$

  $\Delta=25>0$

  $2x^2+x-3=0 \iff x=1 \vee x=-\frac{3}{2}$

  $x\leq -\frac{3}{2} \vee x\geq 1.$



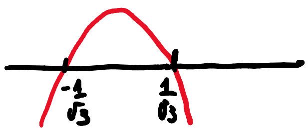


- $10x^2+3x+1\leq 0$

  $\Delta = 9-4\cdot 10 = -31<0$

  non ci sono soluzioni della disequazione.

- $1-3x^2<0$



  $1-3x^2=0$

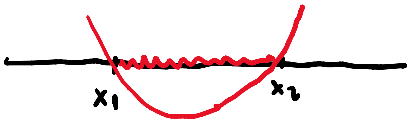
  $3x^2=1 \iff x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ (quindi $\Delta>0$)

  Soluzioni della disequazione: $x<-\frac{1}{\sqrt{3}} \vee x>\frac{1}{\sqrt{3}}$

- $4x^2 + x - 1 \leq 0$

$\Delta = 1 + 16 = 17$

$4x^2 + x - 1 = 0 \iff x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{8}$



soluzioni: $\dfrac{-1-\sqrt{17}}{8} \leq x \leq \dfrac{-1+\sqrt{17}}{8}$

OSS Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Allora

1) $ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$
2) Se $\Delta > 0$ e x_1, x_2 sono le due radici di ax^2+bx+c, allora $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
3) Se $\Delta = 0$ allora $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$
4) Se $\Delta < 0$ allora $\forall x \in \mathbb{R}$: $ax^2 + bx + c$ ha lo stesso segno di a.
5) Se $\Delta > 0$: $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$ (Formula ridotta)

Caso di polinomi prodotto. Le radici e il segno di un polinomio che è prodotto di polinomi si possono determinare dalle radici e dal segno dei singoli fattori.

ESEMPI

$(x+1)(x-2)(1-3x) = 0$

legge di annullamento del prodotto

$x + 1 = 0 \quad \vee \quad x - 2 = 0 \quad \vee \quad 1 - 3x = 0$

$x = -1 \quad \vee \quad x = 2 \quad \vee \quad x = \frac{1}{3}$

Attenzione: Vale solo quando abbiamo un prodotto $= 0$!

$$x(x-1) = 2$$

In questi casi bisogno svolgere i conti:

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \iff x = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

ESEMPI

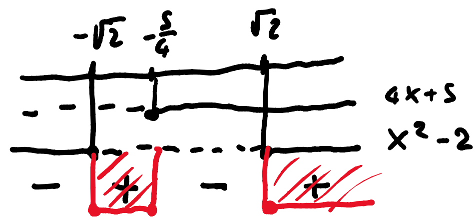
$$(4x+5)(x^2-2) \geq 0$$

Studiare il segno dei singoli fattori

$4x + 5 \geq 0 \iff 4x \geq -5 \iff x \geq -\frac{5}{4}$

$x^2 - 2 \geq 0 \iff x \geq \sqrt{2} \ \vee \ x \leq -\sqrt{2}$

Soluzioni: $-\sqrt{5} \leq x \leq -\frac{5}{2} \ \vee \ x \geq \sqrt{2}$



ESEMPIO

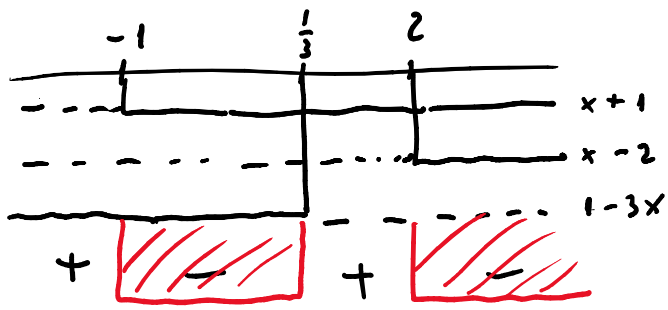
$$(x+1)(x-2)(1-3x) \leq 0$$

$x + 1 \geq 0 \iff x \geq -1$

$x - 2 \geq 0 \iff x \geq 2$

$1 - 3x \geq 0 \iff -3x \geq -1 \iff x \leq \frac{1}{3}$

Soluzioni: $x \geq 2 \ \vee \ -1 \leq x \leq \frac{1}{3}$



Come si fa quando ho $p(x) = 0$ (o $\geq, \leq, >, < 0$) e il grado di $p(x) \geq 3$?

FATTO: Ogni polinomio di grado ≥ 3 si può scrivere come prodotto di polinomi di grado 1 o 2.
(Si può sempre scomporre il polinomio).

ESEMPI

$$x^3 + x^2 - 6x < 0$$

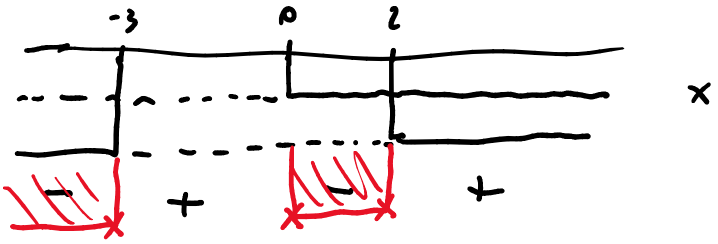
$$x(x^2 + x - 6) < 0$$

$$x^2 + x - 6 \ge 0$$

$$\Delta = 1 + 24 = 25$$

$$x^2 + x - 6 = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

$$x^2 + x - 6 \ge 0 \iff x \ge 2 \vee x \le -3$$



Soluzioni:

$x < -3 \vee 0 < x < 2.$

ESEMPIO

$$x^3 - 4x + 3 = 0$$

Notiamo che 1 è una soluzione di questa equazione

$$1^3 - 4 \cdot 1 + 3 = -3 + 3 = 0$$

L'idea è dividere per $x - 1$.

	1	0	-4	3
1		1	1	-3
	1	1	-3	0

Questo ci dice che

$$x^3 - 4x + 3 = (x-1)(x^2 + x - 3)$$

L'equazione iniziale diventa

$$(x-1)(x^2 + x - 3) = 0$$

$$x - 1 = 0 \vee x^2 + x - 3 = 0$$

$$x = 1 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Soluzioni: $x = 1 \quad \vee \quad x = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \quad \vee \quad x = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

Idea generale: se conosco una radice posso abbassare di 1 il grado dell'equazione usando la regola di Ruffini.

Fatto: Se $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ con $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ e se $q = \frac{n}{m}$ è una radice di $p(x)$ allora n è un divisore di a_0 e m è un divisore di a_n.

ESEMPIO

$$1 - 2x - x^2 + 2x^3 \geq 0$$

$$p(x) = 1 - 2x - x^2 + 2x^3$$

$$p(1) = 1 - 2 - 1 + 2 = 0$$

$$p(-1) = 1 + 2 - 1 - 2 = 0$$

$$p\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1 - 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

Posso concludere che:

$$1 - 2x - x^2 + 2x^3 = 2(x-1)(x+1)\left(x - \tfrac{1}{2}\right)$$

Possiamo verificarlo anche con Ruffini: Dividiamo per $x - \frac{1}{2}$

	2	-1	-2	1
$\frac{1}{2}$		1	0	-1
	2	0	-2	0

Il polinomio si scompone come:

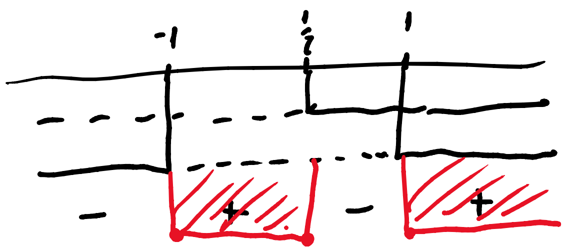
$$\left(x - \tfrac{1}{2}\right)(2x^2 - 2)$$

$$= 2\left(x - \tfrac{1}{2}\right)(x^2 - 1)$$

$$\cancel{2}\left(x - \tfrac{1}{2}\right)(x^2 - 1) \geq 0$$

Soluzioni:

$$-1 \leq x \leq \frac{1}{2} \quad \vee \quad x \geq 1.$$



Equazioni razionali / razionali fratte.

Sono equazioni in cui la x compare all'interno di rapporti tra polinomi.

Per risolverle:

1) Imporre che tutti i denominatori siano $\neq 0$ (condizioni di esistenza / c.e. / campo di esistenza)
2) Risolvere l'equazione
3) Controllare che le soluzioni trovate siano compatibili con le c.e.

ESEMPIO

$$\frac{3x^2 - 2x - 5}{x+1} = 0 \qquad \text{c.e}: \quad x+1 \neq 0 \quad \text{cioè} \quad x \neq -1$$

$$3x^2 - 2x - 5 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 1 + 3 \cdot 5 = 16$$

$$3x^2 - 2x - 5 = 0 \iff x = \frac{1 \pm 4}{3} = \begin{cases} \frac{5}{3} \\ -1 \end{cases}$$

Non soddisfa le c.e

L'unica soluzione è $x = \frac{5}{3}$.

ESEMPIO

$$\frac{1}{6x^2-1} = 1$$

c.e: $6x^2 - 1 \neq 0$

$$6x^2 - 1 = 0 \iff 6x^2 = 1 \iff x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$$

quindi

$$6x^2 - 1 \neq 0 \iff x \neq -\frac{1}{\sqrt{6}} \quad \wedge \quad x \neq \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\frac{1}{6x^2-1} = 1$$

$$1 = 6x^2-1$$

$$6x^2 = 2$$

$$3x^2 = 1$$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Soluzioni: $x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \vee \quad x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

ESEMPIO

$$\frac{x^4 - x^3 - 2x}{x^2 - x + 1} = 1 - x$$

- c.e.: $x^2 - x + 1 \neq 0$

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$$

Sempre vero che $x^2 - x + 1 \neq 0$. Non ci sono c.e. da imporre.

- $x^4 - x^3 - 2x = (1-x)(x^2 - x + 1)$

$$x^4 - \cancel{x^3} - \cancel{2x} = x^2 - \cancel{x} + 1 - \cancel{x^3} + x^2 - \cancel{x}$$

$$x^4 - 2x^2 - 1 = 0$$

Sostituzione $t = x^2$. L'equazione diventa:

$$t^2 - 2t - 1 = 0$$

$$t = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$t = 1-\sqrt{2} \quad \vee \quad t = 1+\sqrt{2}$$

$$x^2 = 1-\sqrt{2} \quad \vee \quad x^2 = 1+\sqrt{2}$$

impossibile $\qquad x = \pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$

Soluzioni: $x = \sqrt{1+\sqrt{2}} \quad \vee \quad x = -\sqrt{1+\sqrt{2}}$

Disequazioni razionali

Per risolverle:

1) Condizioni di esistenza
2) Si riconduce la disequazione a una disequazione del tipo $\frac{p(x)}{q(x)} \geq 0$ $(o \leq, >, <)$
3) Studio del segno
4) Scrittura finale delle soluzioni.

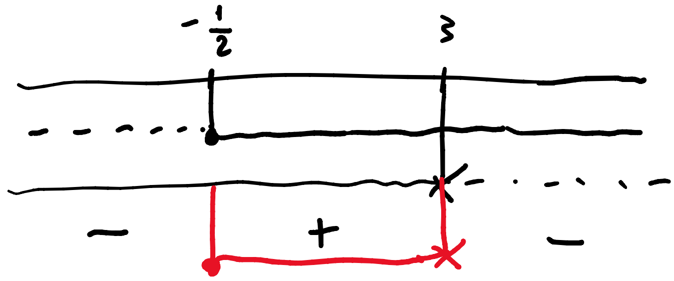
ESEMPIO

$$\frac{2x+1}{3-x} \geq 0$$

- c.e: $3-x \neq 0$ cioè $x \neq 3$.
- Studio del segno:

$2x+1 \geq 0 \iff x \geq -\frac{1}{2}$

$3-x \geq 0 \iff x \leq 3$



- Soluzioni

$-\frac{1}{2} \leq x < 3$

ESEMPIO

$$\frac{x+2}{x} > x+1$$

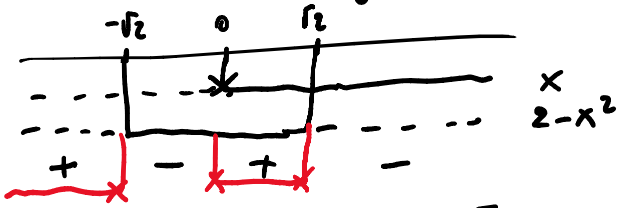
- c.e: $x \neq 0$
- $\frac{x+2}{x} - (x+1) > 0$

$$\frac{x+2-x(x+1)}{x} > 0$$

$$\frac{\cancel{x}+2-x^2-\cancel{x}}{x} > 0$$

$$\frac{2-x^2}{x} > 0$$

Studio del segno



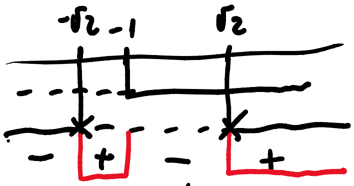
Soluzioni: $x < -\sqrt{2} \quad \vee \quad 0 < x < \sqrt{2}$

Sistemi di disequazioni:

ESEMPIO

$$\begin{cases} 2x - 3 \leq 0 \\ \dfrac{x+1}{x^2-2} \geq 0 \end{cases}$$

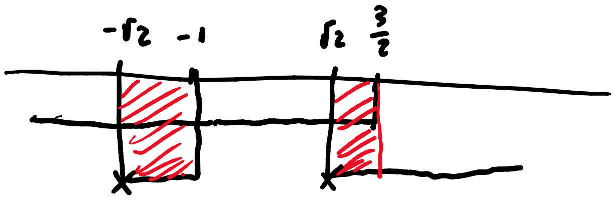
- $2x - 3 \leq 0 \iff x \leq \frac{3}{2}$
- $\dfrac{x+1}{x^2-2} \geq 0$



Soluzione della seconda disequazione:
$-\sqrt{2} < x \leq -1 \quad \vee \quad x > \sqrt{2}$.

- Il sistema diventa:

$$\begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ -\sqrt{2} < x \leq -1 \quad \vee \quad x > \sqrt{2} \end{cases}$$



Soluzioni del sistema:
$-\sqrt{2} < x \leq -1 \quad \vee \quad \sqrt{2} < x \leq \frac{3}{2}$

Equazioni con valore assoluto:

ESEMPIO

$$|2x+1| = 3x - 1$$

Come si risolve:

$$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } 2x+1 \geq 0 \\ -2x-1 & \text{se } 2x+1 < 0 \end{cases}$$

Due casi:

① $\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 2x+1 = 3x-1 \end{cases}$ $\vee$ ② $\begin{cases} 2x+1 < 0 \\ -2x-1 = 3x-1 \end{cases}$

① $\begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x = 2 \end{cases}$

$x = 2$

② $\begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ 5x = -2 \end{cases}$

$\begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{2}{5} \end{cases}$

non soddisfa la disequazione

Il sistema ② non ha soluzione

L'unica soluzione dell'equazione di partenza è $x = 2$.

ESEMPIO

$$|x^2 - 4| = 2x + 1$$

$$|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x^2 - 4 \geq 0 \\ 4 - x^2 & \text{se } x^2 - 4 < 0 \end{cases}$$

L'equazione è equivalente:

① $\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x^4 - 4 = 2x+1 \end{cases}$ $\vee$ ② $\begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ 4 - x^2 = 2x+1 \end{cases}$

① • $x^2 - 4 \geq 0 \iff x \geq 2 \ \vee \ x \leq -2$

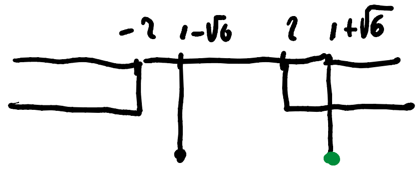
• $x^2 - 2x - 5 = 0$

$x = 1 \pm \sqrt{6}$

$x = 1 - \sqrt{6} \ \vee \ x = 1 + \sqrt{6}$

Il sistema ① diventa:

$$\begin{cases} x \geq 2 \quad \vee \quad x \leq -2 \\ \underbrace{x = 1-\sqrt{6}}_{NO} \quad \vee \quad \underbrace{x = 1+\sqrt{6}}_{SI} \end{cases}$$



Unica soluzione di ① è $1+\sqrt{6}$

② $\begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ 4 - x^2 = 2x+1 \end{cases}$

- $-2 < x < 2$
- $x^2 + 2x - 3 = 0$

$x = -1 \pm \sqrt{4} = \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} -2 < x < 2 \\ \underbrace{x = -3}_{NO} \quad \vee \quad \underbrace{x = 1}_{SI} \end{cases}$$

$x = 1$ è l'unica soluzione del sistema ②

Conclusione: le soluzioni dell'equazione iniziale sono $x = 1 \quad \vee \quad x = 1+\sqrt{6}$.

In modo simile si risolvono le disequazioni con valore assoluto:

ESEMPIO

$$x - |2x-3| \geq 1$$

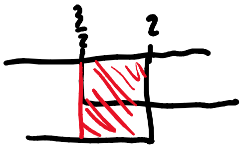
$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3 & \text{se} \quad 2x-3 \geq 0 \\ -2x+3 & \text{se} \quad 2x-3 < 0 \end{cases}$$

La disequazione è equivalente a:

$$\begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ x-(2x-3) \geq 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 2x-3 < 0 \\ x-(-2x+3) \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x \geq 3 \\ -x+3 \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \leq 2 \end{cases}$$



$$\frac{3}{2} \leq x \leq 2$$

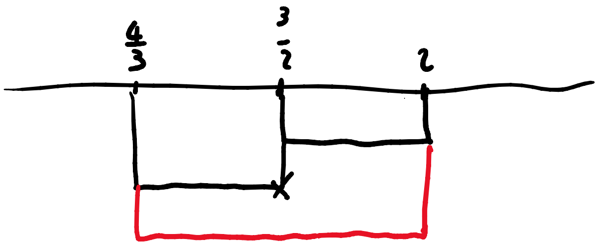
$$\begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x+2x-3 \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ 3x \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x \geq \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\frac{4}{3} \leq x < \frac{3}{2}$$

Soluzioni: $\frac{3}{2} \leq x \leq 2 \quad \vee \quad \frac{4}{3} \leq x < \frac{3}{2}$



cioè

$\frac{4}{3} \leq x \leq 2$.

C'è anche un altro metodo:

Ricordiamo:

- $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$ cioè $\begin{cases} x \leq a \\ x \geq -a \end{cases}$

- $|x| \geq a \iff x \geq a \ \vee \ x \leq -a$

- $x - |2x-3| \geq 1$

$$x - 1 \geq |2x-3|$$

$$|2x-3| \leq x-1$$

$$\iff \begin{cases} 2x-3 \leq x-1 \\ 2x-3 \geq -x+1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq \frac{4}{3} \end{cases}$$ cioè $\frac{4}{3} \leq x \leq 2$.

- $x - |2x-3| \leq 1$

$x - 1 \leq |2x-3|$

$|2x-3| \geq x-1$

$2x-3 \geq x-1 \quad \vee \quad 2x-3 \leq -x+1$

$x \geq 2 \quad \vee \quad x \leq \frac{4}{3}$

Soluzione $\quad x \leq \frac{4}{3} \quad \vee \quad x \geq 2.$

Attenzione :

$|x| = a \quad \not\Leftrightarrow \quad x = a \quad \vee \quad x = -a$

L'equivalenza corretta è :

$|x| = |a| \quad \Leftrightarrow \quad x = a \quad \vee \quad x = -a.$

ESERCIZIO

$$\frac{|3x-2| - 1}{x^2-3} \leq 0$$

I metodo : distinguiamo i casi :

$$|3x-2| = \begin{cases} 3x-2 & \text{se } 3x-2 \geq 0 \\ -3x+2 & \text{se } 3x-2 < 0 \end{cases}$$

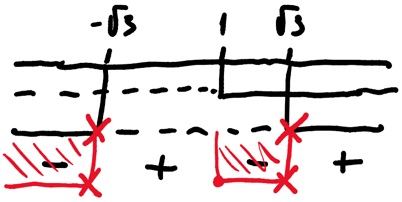
L'equazione è equivalente a

$$\begin{cases} 3x-2 \geq 0 \\ \dfrac{3x-2-1}{x^2-3} \leq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 3x-2 < 0 \\ \dfrac{-3x+2-1}{x^2-3} \leq 0 \end{cases}$$

① $$\begin{cases} 3x-2 \geq 0 \\ \dfrac{3x-3}{x^2-3} \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ \frac{x-1}{x^2-3} \leq 0 \end{cases}$$

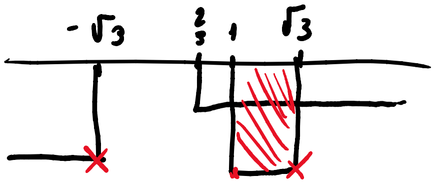
$$\frac{x-1}{x^2-3} \leq 0$$



$$x < -\sqrt{3} \quad \vee \quad 1 \leq x < \sqrt{3}$$

Il sistema ① diventa:

$$\begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x < -\sqrt{3} \quad \vee \quad 1 \leq x < \sqrt{3} \end{cases}$$

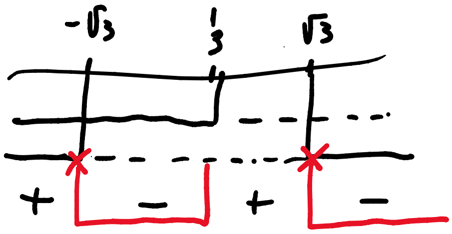


$$1 \leq x < \sqrt{3}$$

② $$\begin{cases} 3x - 2 < 0 \\ \frac{-3x+2 \quad -1}{x^2-3} \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \frac{2}{3} \\ \frac{1-3x}{x^2-3} \leq 0 \end{cases}$$

$$\frac{1-3x}{x^2-3} \leq 0$$



$$-\sqrt{3} < x \leq \frac{1}{3} \quad \vee \quad x > \sqrt{3}$$

$$\begin{cases} -\sqrt{3} < x \leq \frac{1}{3} \quad \vee \quad x > \sqrt{3} \\ x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$-\sqrt{3} < x \leq \frac{1}{3}$$

Conclusione: le soluzioni sono:

$$-\sqrt{3} < x \leq \frac{1}{3} \qquad \vee \qquad 1 \leq x < \sqrt{3}$$

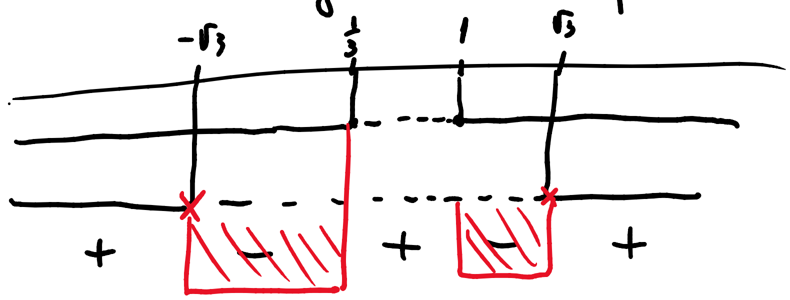
II metodo: Studiamo direttamente il segno:

$$\frac{|3x-2|-1}{x^2-3} \leq 0$$

- $|3x-2|-1 \geq 0 \iff |3x-2| \geq 1 \iff$
  $\iff 3x-2 \geq 1 \ \vee \ 3x-2 \leq -1$
  $\iff x \geq 1 \ \vee \ x \leq \frac{1}{3}$

- $x^2-3 \geq 0 \iff x \geq \sqrt{3} \ \vee \ x \leq -\sqrt{3}$

Studio del segno della frazione



$$-\sqrt{3} < x \leq \frac{1}{3} \quad \vee \quad 1 \leq x < \sqrt{3}.$$