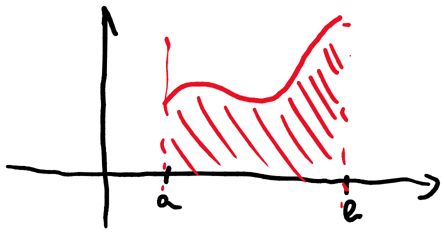
LEZIONE 27

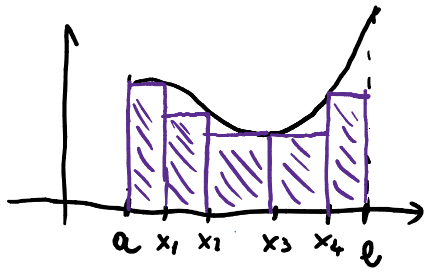
giovedì 24 novembre 2022 09:03

Integrali:

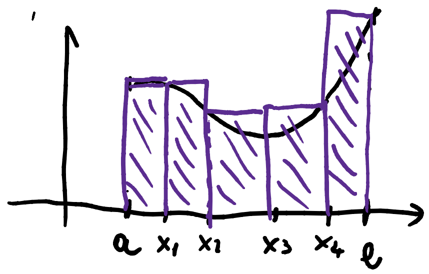
Sia $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, vogliamo calcolare l'area della regione compresa tra il grafico di f e l'asse x



L' idea è approssimare l'area con aree di rettangoli:

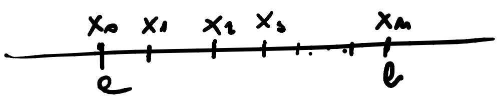


la somma delle aree dei rettangoli è un'approssimazione dal basso dell'area che vogliamo calcolare.



La somma delle aree dei rettangoli è un'approssimazione dall'alto dell'area che vogliamo calcolare.

Def: Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Una SUDDIVISIONE (o PARTIZIONE) di $[a,b]$ è un insieme $D = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dove $x_0 = a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n = b$



OSS Se D è una suddivisione di $[a,b]$, $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, allora:

$$[a,b] = [x_0,x_1] \cup [x_1,x_2] \cup [x_2,x_3] \cup \dots \cup [x_{n-1},x_n]$$
$$= \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i]$$

Def: Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Sia $D = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una suddivisione di $[a, b]$. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata in $[a, b]$. Definiamo:

1) $s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1})$ (SOMMA INFERIORE DI f RISPETTO A D)

2) $S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1})$ (SOMMA SUPERIORE DI f RISPETTO A D)

OSS Se D_1 e D_2 sono due partizioni di $[a, b]$ allora $s(f, D_1) \leq S(f, D_2)$.

Consideriamo gli insiemi:

$I_{inf} = \{ s(f, D) \mid D \text{ partizione di } [a, b] \}$

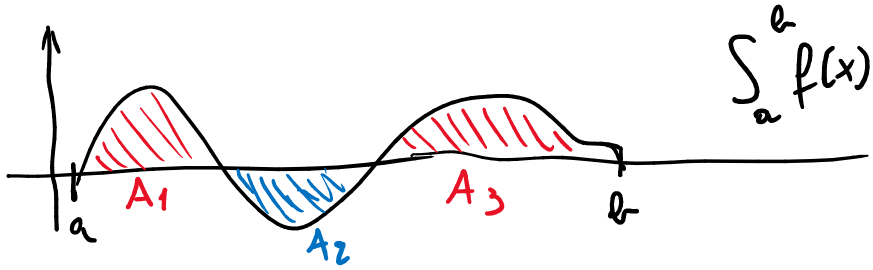
$I_{sup} = \{ S(f, D) \mid D \text{ partizione di } [a, b] \}$

Def: Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata, si dice che f è INTEGRABILE (SECONDO RIEMANN) in $[a, b]$ se $\inf I_{sup} = \sup I_{inf}$.
In tal caso definiamo INTEGRALE DI f IN $[a, b]$ il numero $\int_a^b f(x)\,dx := \inf I_{sup} = \sup I_{inf}$

Interpretazione:

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Se $f \geq 0$, $\int_a^b f(x)\,dx$ rappresenta l'area della regione compresa tra il grafico di f e l'asse x.

Se f cambia segno, le regioni in cui $f \leq 0$ vengono considerate con segno negativo



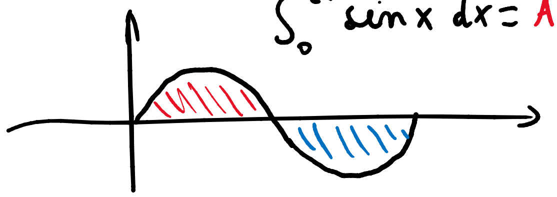
$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3$$

ESEMPIO

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = 0 .$$

$A_1 = A_2$

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = A_1 - A_2 = 0$$



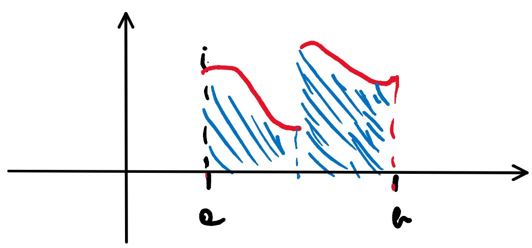
TEOREMA (INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI MONOTONE)

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Se f è monotona in $[a, b]$ (e limitata) allora f è integrabile (secondo Riemann) in $[a, b]$.

TEOREMA 2 (INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE)

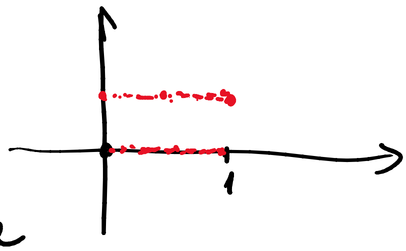
Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ e sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Se f è continua in $[a, b]$ allora è integrabile in $[a, b]$.

NOTA: Si può dimostrare, più in generale, che se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è limitata e ha un numero finito di punti di discontinuità, allora f è integrabile.



Un esempio di funzione non integrabile :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{se } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1] \end{cases}$$



Si dimostra che f non è integrabile in $[0,1]$.

NOTAZIONE

Dati $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ abbiamo definito $\int_a^b f(x)\,dx$ nella definizione precedente.

Se $a > b$ allora poniamo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

In generale gli integrali tra due estremi in ordine qualsiasi vengono chiamati INTEGRALI DEFINITI.

PROPRIETÀ DEGLI INTEGRALI

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili in $[a, b]$. Allora:

1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$

(LINEARITÀ DELL'INTEGRALE)

2) Se $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a, b]$ allora

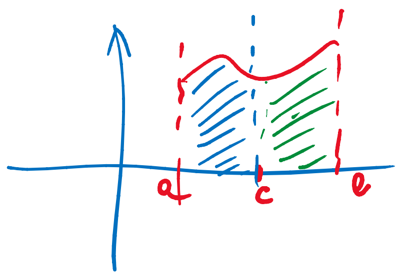
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

(MONOTONIA DELL'INTEGRALE)

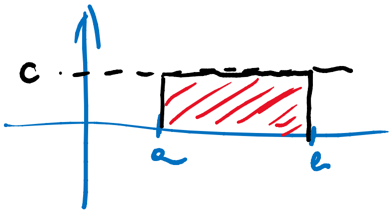
3) $\displaystyle\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

4) Se $c \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

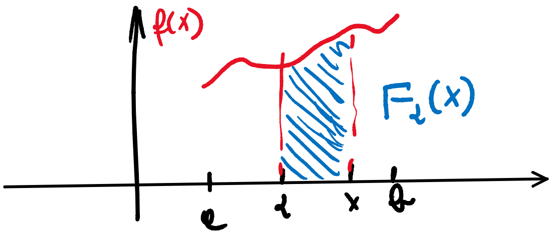


5) $\forall\, c \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_a^b c \, dx = c(b-a)$



Come si calcolano gli integrali

Def: Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a \le b$. Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabile in $[a, b]$. Sia $\alpha \in [a, b]$, possiamo definire la funzione $F_\alpha(x) = \int_\alpha^x f(t)\, dt$.
F_α è una funzione $F_\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e si chiama FUNZIONE INTEGRALE di f con punto base α.



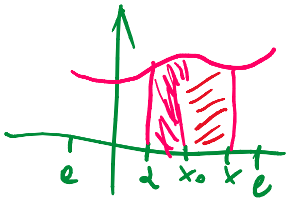
TEOREMA (1° TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE)
Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a \le b$. Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabile in $[a, b]$. Sia $x_0 \in [a, b]$. Assumiamo che f sia continua in x_0. Allora $\forall\, \alpha \in [a, b]$ si ha che la funzione integrale $F_\alpha(x) = \int_\alpha^x f(t)\, dt$ è derivabile in x_0 e $F_\alpha'(x_0) = f(x_0)$.

DIM.
Dobbiamo far vedere che $\exists$ finito il limite
$$\lim_{x \to x_0} \frac{F_\alpha(x) - F_\alpha(x_0)}{x - x_0}$$
e che è uguale a $f(x_0)$.

Sappiamo che f è continua in x_0. Allora $\forall\, \varepsilon > 0$:

$\exists\, \delta > 0$ t.c. $f(x_0)-\varepsilon < f(x) < f(x_0)+\varepsilon \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$.

Sia $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$. Per semplicità assumiamo $x > x_0$.



$$\frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} = \frac{\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt}{x - x_0}$$

$$= \frac{\cancel{\int_a^{x_0} f(t)\,dt} + \int_{x_0}^x f(t)\,dt - \cancel{\int_a^{x_0} f(t)\,dt}}{x - x_0}$$

$$= \frac{\int_{x_0}^x f(t)\,dt}{x - x_0}$$

Sappiamo che $x \in (x_0, x_0+\delta)$. Allora $\forall\, t \in [x_0, x]$ si ha che $t \in [x_0, x_0+\delta)$. Quindi:

$f(x_0)-\varepsilon < f(t) < f(x_0)+\varepsilon$. Quindi

$$\int_{x_0}^x f(t)\,dt \le \int_{x_0}^x (f(x_0)+\varepsilon)\,dt = (f(x_0)+\varepsilon)(x-x_0)$$

e
$$\int_{x_0}^x f(t)\,dt \ge (f(x_0)-\varepsilon)(x-x_0)$$

Allora
$$f(x_0)-\varepsilon \le \frac{\int_{x_0}^x f(t)\,dt}{x-x_0} \le f(x_0)+\varepsilon$$

Cioè
$$\frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} \in [f(x_0)-\varepsilon,\ f(x_0)+\varepsilon].$$

Per la def. di limite
$$\lim_{x \to x_0} \frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

oss

Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$ allora F_a è derivabile in $[a,b]$ e $F_a'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b]$.

Def: Una funzione $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ si dice una **PRIMITIVA** di una funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se F è derivabile in $[a,b]$ e $F'(x)=f$ $\forall x\in[a,b]$.

OSS Il teorema fondamentale del calcolo integrale dice che, se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$, allora F_a è una primitiva di f.

ESEMPI

1) $f(x)=1$ (funzione costante)

$$F(x)=x$$
$$F(x)=x+1$$
$$F(x)=x+17$$

$\forall c\in\mathbb{R}$, $x+c$ è una primitiva di f.

2) $f(x)=\sin x$

Una primitiva è: $F(x)=-\cos x$.

Più in generale posso prendere $F(x)=-\cos x+c$, con $c\in\mathbb{R}$.

FATTO

Se F_1 e F_2 sono due primitive di una funzione continua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ allora $\exists\, c\in\mathbb{R}$ tale che $F_2(x)=F_1(x)+c$.

(F_1-F_2 è costante).

DIM

Se F_1 e F_2 sono primitive allora:

$$(F_1(x)-F_2(x))'=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

$F_1 - F_2$ ha derivata sempre nulla, quindi è costante.

TEOREMA (2° TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE)
Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$. Sia F una primitiva di f. Allora:
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

DIM
Consideriamo la funzione integrale $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.
Per il 1° teorema fondamentale del calcolo integrale F_a è una primitiva di f.
Ma anche F è una primitiva, quindi $\exists\, c \in \mathbb{R}$ t.c.
$F_a(x) = F(x) + C$.

Allora $\int_a^b f(t)\,dt = F_a(b) = F(b) + C$

Inoltre $F_a(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$.

quindi: $F(a) = F_a(a) - C = -C$ cioè $C = -F(a)$.

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) + C = F(b) - F(a) \qquad \blacksquare$$

Ricapitoliamo:

Come si calcola $\int_a^b f(x)\,dx$?

1) Trovare una primitiva F di f.
2) Si calcola:
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

ESEMPIO

$$\int_1^3 x\,dx = ?$$

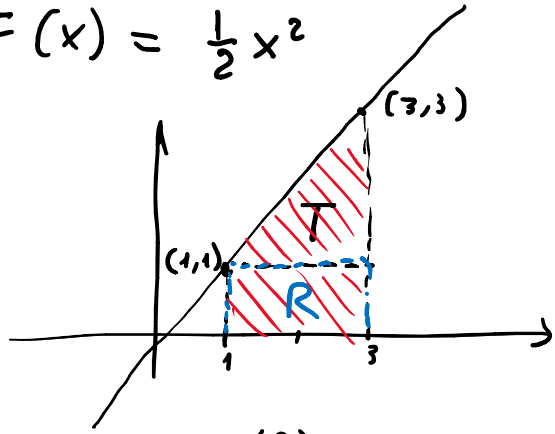
$f(x) = x$

Cerchiamo una primitiva: $F(x) = \frac{1}{2}x^2$

$F(3) = \frac{1}{2}3^2 = \frac{9}{2}$

$F(1) = \frac{1}{2}$

$$\int_1^3 x\,dx = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4.$$



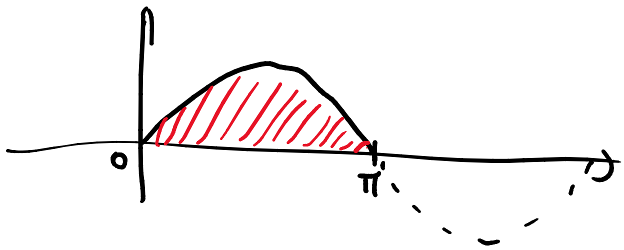
Area(R) = 2

Area(T) =

Area(R) + Area(T) = 2 + 2 = 4

ESEMPIO:

$$\int_0^\pi \sin x\,dx$$



$f(x) = \sin x$

$F(x) = -\cos x$

$F(\pi) = -\cos\pi = 1$

$F(0) = -\cos 0 = -1$

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2.$$

Calcoliamo invece

$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = ?$$

$F(2\pi) = -\cos(2\pi) = -1$
$F(0) = -1$
$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = -1 - (-1) = -1 + 1 = 0.$

Notazione:
$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b = \Big[F(x)\Big]_a^b$$

ESEMPIO
$$\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 = \frac{1}{3}$$

Per calcolare $\int_a^b f(x)\,dx$ occorre trovare una primitiva di $f(x)$ in $[a,b]$.
Si usa un simbolo di integrale diverso per indicare le primitive:

<u>Def</u>: Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Si dice INTEGRALE INDEFINITO DI f l'insieme di tutte le primitive di f.
Indichiamo l'integrale indefinito con $\int f(x)\,dx$

<u>NOTA</u> Se conosciamo una primitiva F allora le altre sono del tipo $F(x) + C$. Quindi si scrive:
$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

<u>ESEMPI</u>:

- $\int 1 \, dx = x + C$
- $\int 2 \, dx = 2x + C$

- $\int x \, dx = \frac{1}{2} x^2 + C.$
- $\int \alpha x \, dx = \frac{\alpha}{2} x^2 + C$
- $\int x^2 \, dx = \frac{1}{3} x^3 + C.$
- $\int x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$ se $\alpha \neq -1.$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \log|x| + C$ in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$
- $\int e^x \, dx = e^x + C$
- $\int e^{2x} \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$
- $\int e^{\alpha x} \, dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + C$ se $\alpha \neq 0.$
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C$
- $\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arccos x + C$

$$\bullet \int a^x \, dx = \int e^{\log a^x} = \int e^{x \log a} \, dx$$

$$= \frac{1}{\log a} e^{x \log a} + C = \frac{a^x}{\log a} + C.$$

Attenzione a non confondere i due tipi di integrali.

$$\int e^{2x} \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

mentre:

$$\int_0^1 e^{2x} \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2}.$$