LEZIONE 22

mercoledì 16 novembre 2022 09:01

Metodo per calcolare limiti del tipo $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ nel caso di forme indeterminate del tipo $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

TEOREMA (DI DE L'HÔPITAL)

Siano $a, b \in \mathbb{R}^*$ con $a < b$. Siano $f, g: (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabili in (a, b). Assumiamo che:

1) $\lim_{x \to a^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a^+} g(x) = 0$ $\left(\text{oppure } \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \in \{-\infty, +\infty\} \text{ e } \lim_{x \to a^+} g(x) \in \{-\infty, +\infty\} \right)$

2) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

3) $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}^*$

Allora $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ e $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$

Nota: Il risultato vale anche per $\lim_{x \to b^-}$ o $\lim_{x \to x_0}$ con $x_0 \in (a, b)$.

ESEMPI

1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1 - x} \overset{(D.L.H\,?)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{(e^x)'}{(1-x)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{-1} = \lim_{x \to +\infty} -e^x = -\infty$

2) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 + 4x - 5}$ $\quad \frac{0}{0}$ f.i.

$\overset{D.L.H.}{=} \lim_{x \to 1} \frac{2x}{3x^2 + 4} = \frac{2}{7}$.

3) Si possono verificare con questo teorema tutti i limiti notevoli:

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{D.L.H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1.$

$$\bullet \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{D.L.H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = \lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1.$$

$$\bullet \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \overset{D.L.H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

4) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x^2+1)}{x - \sqrt{x}} \overset{D.L.H}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x}{1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}} \to 1$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{x^2+1} \overset{D.L.H}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

5) $$\lim_{x\to 0^+} x \log x \qquad 0\cdot(-\infty)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\frac{1}{x}} \log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}}$$

$\frac{-\infty}{+\infty}$ f. i.
qui si può applicare D. L. H.

$$\overset{D.L.H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x}\cdot x^2 = \lim_{x\to 0} -x = 0.$$

<u>Attenzione</u>

Il teorema NON si applica quando non abbiamo forme indeterminate.

ESEMPIO

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = x$$

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin\pi}{\pi} = 0$$

In questo caso il teorema non vale, infatti

$$\lim_{x\to\pi} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\pi} \frac{\cos x}{1} = \cos\pi = -1$$

I due limiti sono diversi!

Attenzione 2 Il teorema non si applica se $\nexists \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

ESEMPIO

$f(x) = x + \sin x$

$g(x) = x$

Calcoliamo $\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sin x}{x} \overset{(O.L.H\,?)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \cos x}{1}$

$= \lim_{x \to +\infty} 1 + \cos x \quad \nexists$

NO Bisogna trovare un altro metodo:

Si ha che:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{\sin x}{x} = 1 + 0 = 1.$$

Applicazione allo studio degli asintoti obliqui:

Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (o $-\infty$)

Potrebbe esserci un asintoto obliquo:

$y = mx + q$ e $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $q = \lim_{x \to +\infty} f(x) - mx$.

Per calcolare m si può usare O.L.H.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ f.i. $\frac{+\infty}{+\infty}$ o $\frac{-\infty}{+\infty}$

quindi $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} f'(x)$.

Applicazione allo studio dei punti di non derivabilità:

Sia $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in X$ e supponiamo f continua in x_0. Per definire la derivata bisogna calcolare $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Se f è derivabile in un intorno di x_0 ma non sappiamo se è derivabile in x_0, possiamo studiare la derivabilità in x_0 usando D.L.H:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad \frac{0}{0} \text{ f.i}$$

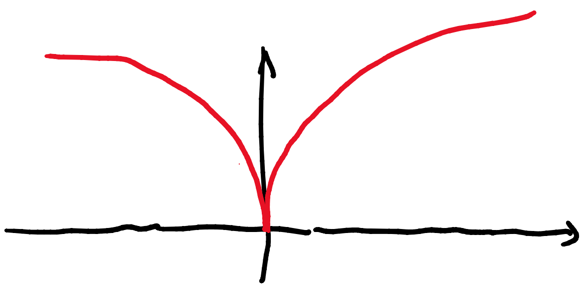
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to x_0} f'(x).$$

e $$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^+} f'(x)$$

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^-} f'(x).$$

ESEMPIO

$$f(x) = \sqrt{|x|}$$



Per $x \neq 0$, so che

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{|x|}} \cdot \frac{|x|}{x} = \frac{\sqrt{|x|}}{2x}$$

per $x \neq 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{-x}}{2x} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{\sqrt{-x}}{2(-x)} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{1}{2\sqrt{-x}} = -\infty.$$

f non è derivabile in x_0.

CI SONO ALCUNI TIPI SPECIALI DI PUNTI DI NON DERIVABILITÀ:

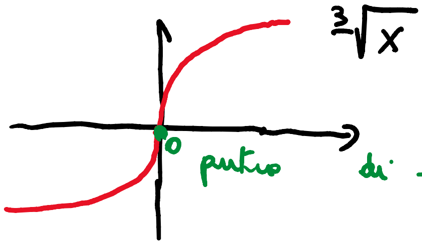
Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$. Supponiamo f derivabile in $(a,b) \setminus \{x_0\}$. Si dice che x_0 è:

- PUNTO DI CUSPIDE se $f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ (o $-\infty$)

  e $f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$ (o $+\infty$)

• PUNTO ANGOLOSO : $f'_+(x_0) \in \mathbb{R}$, $f'_-(x_0) \in \mathbb{R}$ ma $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$.

• PUNTO DI FLESSO A TANGENTE VERTICALE : $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \in \{+\infty, -\infty\}$



punto di flesso a tangente verticale.

ESERCIZIO

1) Studiare il grafico di $f(x) = \dfrac{e^{-2x}}{3x-4}$

2) Disegnare il grafico di $|f(x)|$

3) Determinare i punti di max e min assoluto e locali per f in $[-2, 1]$

---

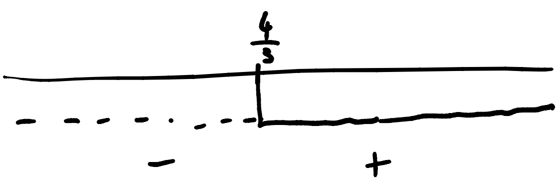
1) Dominio : $3x - 4 \neq 0 \iff x \neq \frac{4}{3}$

$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, \frac{4}{3}) \cup (\frac{4}{3}, +\infty)$.

2) Simmetrie : $f(-x) = \dfrac{e^{2x}}{-3x-4} = -\dfrac{e^{2x}}{3x+4}$

non ci sono simmetrie.

3) Segno : $\dfrac{e^{-2x}}{3x-4} \geq 0$.



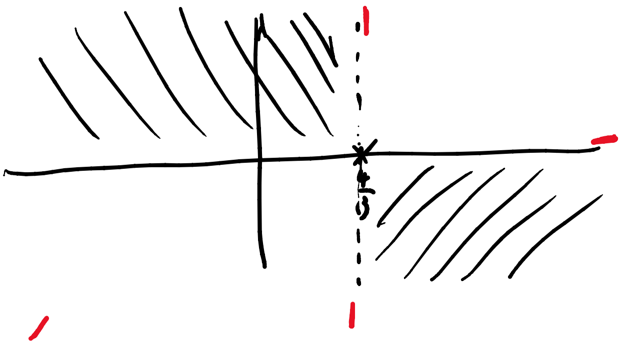
$e^{2x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Conclusione :

$f > 0$ in $(\frac{4}{3}, +\infty)$

$f < 0$ in $(-\infty, \frac{4}{3})$

f sempre $\neq 0$.



4) <u>limiti</u>:

- $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-2x}}{3x-4} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

- $$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-2x}}{3x-4} \qquad \text{f.i. } \frac{+\infty}{-\infty}$$

$$\overset{D.L.H}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-2x} \cdot (-2)}{3} = \lim_{x \to -\infty} -\frac{2}{3} e^{-2x} = -\infty .$$

- $$\lim_{x \to \frac{4}{3}^+} \frac{e^{-2x}}{3x-4} = \frac{e^{-\frac{8}{3}}}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \left(\frac{4}{3}\right)^-} \frac{e^{-2x}}{3x-4} = -\infty$$

$y=0$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

$x = \frac{4}{3}$ è asintoto verticale.

Asintoto obliquo:

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-2x}}{x(3x-4)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-2x}}{3x^2-4x}$$

$$\overset{D.L.H}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-2x}(-2)}{6x-4} = \lim_{x \to \infty} \frac{-2e^{-2x}}{6x-4} \qquad \text{f.i. } \frac{-\infty}{-\infty}$$

$$\overset{D.L.H}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{-2e^{-2x}(-2)}{6} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{6} e^{-2x} = +\infty .$$

non ci sono asintoti obliqui.

<u>Derivata</u>

$$f'(x) = \left(\frac{e^{-2x}}{3x-4}\right)' = \frac{e^{-2x} \cdot (-2)(3x-4) - e^{-2x} \cdot 3}{(3x-4)^2}$$

$$= \frac{e^{-2x}(-6x+8-3)}{(3x-4)^2} = \frac{e^{-2x}(5-6x)}{(3x-4)^2}$$

Segno di f'

$e^{-2x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$(3x-4)^2 > 0 \quad \forall x \in Dom(f)$

$5 - 6x \geq 0 \iff x \leq \frac{5}{6}$

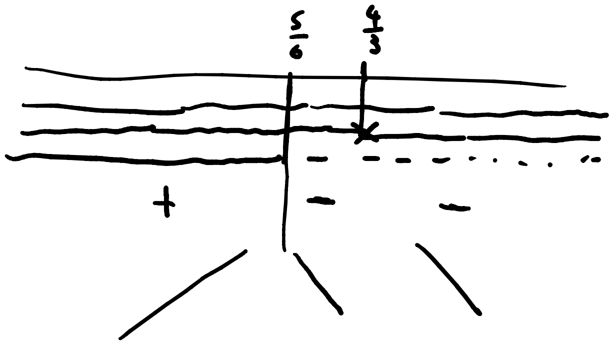
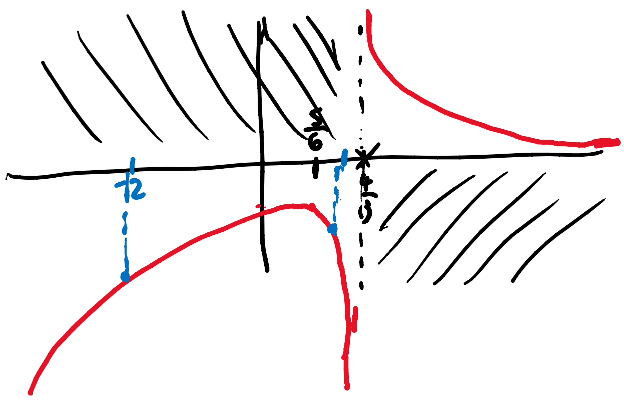
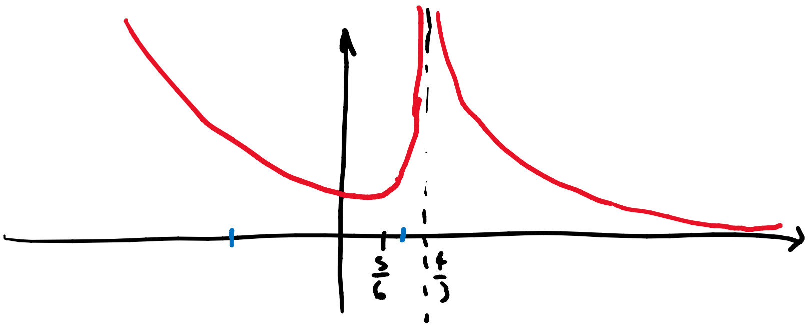


Grafico:



$$f\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{e^{-\frac{5}{3}}}{\frac{5}{2}-4} = -\frac{2e^{-\frac{5}{3}}}{3}$$

2) Disegnare $|f(x)|$

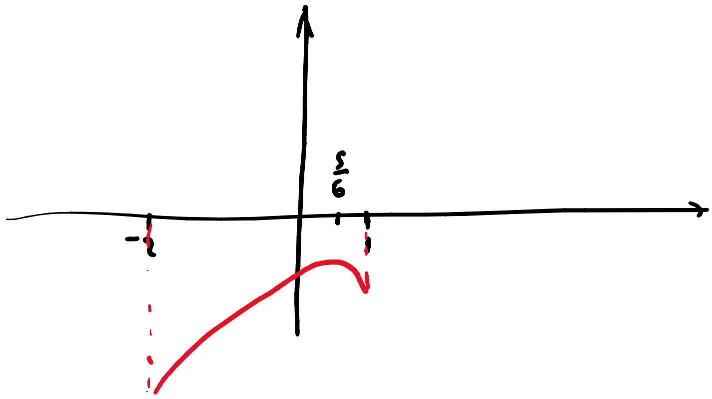


3) Determinare i punti di max e min locale e assoluto di f in $[-2, 1]$

$$f(-2) = \frac{e^4}{-10} = -\frac{1}{10}e^4$$

$$f(1) = \frac{e^{-2}}{-1} = -e^{-2}.$$

$e^{-2} < \frac{1}{10}e^4$



$x = \frac{5}{6}$ è punto di max assoluto (e locale) in $[-2,1]$
$x = -2$ è punto di min assoluto (e locale) in $[-2,1]$
$x = -1$ è punto di min locale in $[-2,1]$.

ESERCIZIO 2

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+2x}}{1-3x^2}$$

1) Studiare il grafico di f
2) Determinare l'immagine di f.

---

1) · Dominio:

$$\begin{cases} 1+2x \geq 0 \\ 1-3x^2 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 3x^2 \neq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \neq \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$\frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{\sqrt{3}} < -\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \neq \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

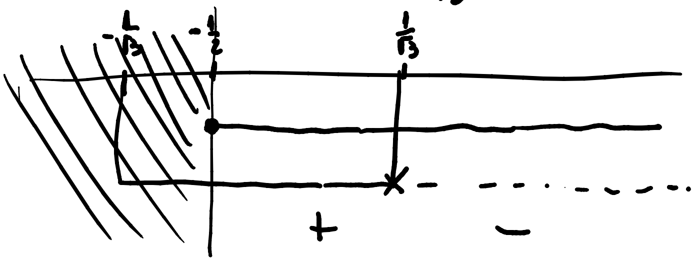
$$Dom(f) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$$

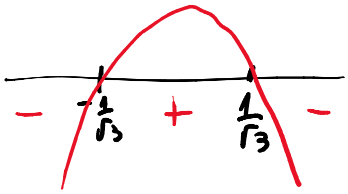
- Non ci sono simmetrie.
- Segno:

$$\frac{\sqrt{1+2x}}{1-3x^2} \geq 0 \; :$$

$\sqrt{1+2x} \geq 0 \iff x \geq -\frac{1}{2}$ (cioè sempre nel dominio)

$1-3x^2 > 0 \iff -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$



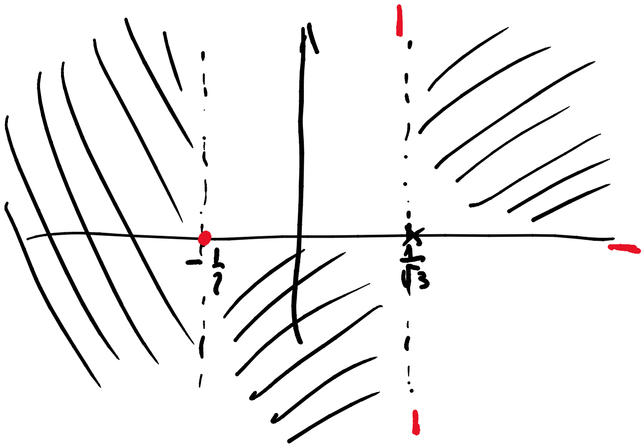


Conclusione:

$f > 0$ in $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$f < 0$ in $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$

$f = 0$ per $x = -\frac{1}{2}$

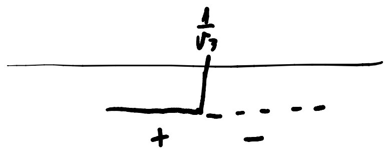


- Limiti:

- $\lim_{x \to -\frac{1}{2}} f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+2x}}{1-3x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}\sqrt{\frac{1}{x}+2}}{x^2\left(\frac{1}{x^2}-3\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \frac{\sqrt{\frac{1}{x}+2}}{\frac{1}{x^2}-3} = 0 \cdot -\frac{2}{3}$
$= 0.$

- $\lim_{x \to \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^-} \frac{\sqrt{1+2x}}{1-3x^2} = +\infty$



- $\lim_{x \to \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^+} \frac{\sqrt{1+2x}}{1-3x^2} = -\infty.$

$y = 0$ è asintoto orizzontale

$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ è asintoto verticale.

Derivata:

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{1+2x}}{1-3x^2} \right)' = \frac{\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1+2x}} \cdot \cancel{2}\,(1-3x^2) - \sqrt{1+2x}\,(-6x)}{(1-3x^2)^2}$$

$$= \frac{\frac{1-3x^2}{\sqrt{1+2x}} + 6x\sqrt{1+2x}}{(1-3x^2)^2} = \frac{\frac{1-3x^2+6x(1+2x)}{\sqrt{1+2x}}}{(1-3x^2)^2}$$

$$= \frac{1-3x^2+6x+12x^2}{\sqrt{1+2x}\,(1-3x^2)^2} = \frac{1+6x+9x^2}{\sqrt{1+2x}\,(1-3x^2)^2}$$

$$= \frac{(1+3x)^2}{\sqrt{1+2x}\,(1-3x^2)^2}$$

Possiamo dire che $f' \geq 0$ in tutto il suo dominio

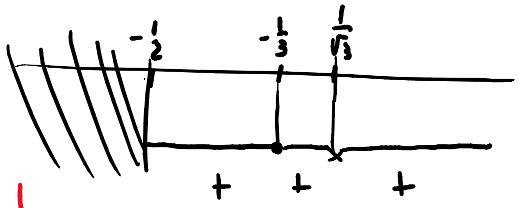
Notiamo anche che

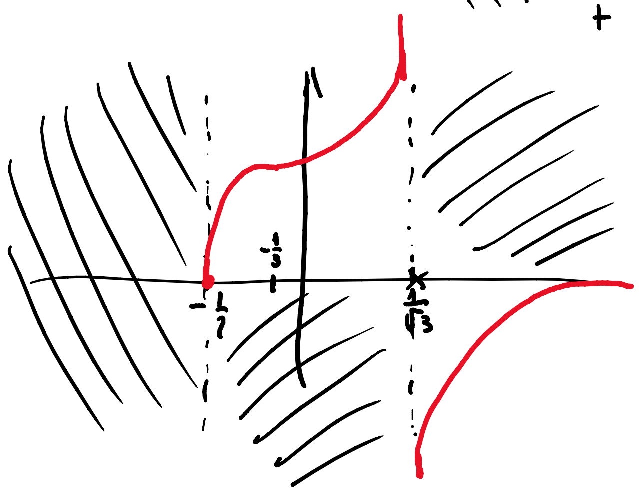
f' è definita per $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$.

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} f'(x) = \frac{\frac{1}{4}}{0^+ \; \frac{1}{16}} = +\infty.$$

f non è derivabile in $x = -\frac{1}{2}$.

Segno di f':





$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{\frac{5}{3}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{\frac{5}{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

Aggiunta: 2) $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, f è suriettiva.