LEZIONE 2

mercoledì 5 ottobre 2022 08:57

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme:

Il MASSIMO di A è il più grande degli elementi di A
(cioè $x = \max A \iff x \in A \wedge x \geq a \ \forall a \in A$).

- Il MINIMO di A è il più piccolo degli elementi di A
(cioè $x = \min A \iff x \in A \wedge x \leq a \ \forall a \in A$)

OSS

- Se $A \neq \emptyset$ ha un numero finito di elementi allora $\exists \max A$ e $\min A$.
- Abbiamo visto che se A è infinito non sempre esistono $\max A$ e $\min A$.

- Un MAGGIORANTE per A è un numero $x \in \mathbb{R}$ t.c. $x \geq a \ \forall a \in A$.
- A si dice SUPERIORMENTE LIMITATO se $\exists$ un maggiorante.
(cioè $\mathcal{M}(A) \neq \emptyset$)
- Se $A \neq \emptyset$ e $\mathcal{M}(A) \neq \emptyset$ si dice ESTREMO SUPERIORE di A la quantità:
$\sup A := \min \mathcal{M}(A)$.

Convenzione:

Se $A \neq \emptyset$ ma $\mathcal{M}(A) = \emptyset$ diremo che $\sup A = +\infty$.
Se $A = \emptyset$ si scrive che $\sup \emptyset = -\infty$.

Riassumendo:

$$\sup A = \begin{cases} \min \mathcal{M}(A) & \text{se } A \neq \emptyset \text{ e } \mathcal{M}(A) \neq \emptyset \\ +\infty & \text{se } A \neq \emptyset \text{ e } \mathcal{M}(A) = \emptyset \\ -\infty & \text{se } A = \emptyset \end{cases}$$

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme, un numero reale $x \in \mathbb{R}$ si dice un MINORANTE per A se $\forall a \in A : x \leq a$.
L'insieme dei minoranti si indica con $m(A)$.

Def Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme. Si dice che A è INFERIORMENTE LIMITATO se $m(A) \neq \emptyset$.

Def Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme, si dice **ESTREMO INFERIORE** di A la quantità:

$$\inf A := \begin{cases} \max m(A) & \text{se } A \neq \emptyset,\ m(A) \neq \emptyset \\ -\infty & \text{se } A \neq \emptyset,\ m(A) = \emptyset \\ +\infty & \text{se } A = \emptyset \end{cases}$$

Def: Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice **LIMITATO** se è limitato sia superiormente che inferiormente.

ESEMPI

- $A = [2, 3)$
  $M(A) = [3, +\infty)$
  $m(A) = (-\infty, 2]$
  $\sup A = 3$ e $\inf A = 2$
  $\nexists \max A$ ma $\exists \min A = 2$.

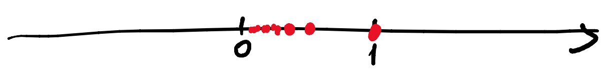
OSS

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme. Se $\exists \max A$ (risp. $\min A$) allora $\sup A = \max A$. (risp. $\inf A = \min A$).

- $A = (-\infty, 5)$
  $M(A) = [5, +\infty)$ A è limitato superiormente
  $m(A) = \emptyset$ ma non inferiormente.
  $\sup A = 5$ e $\inf A = -\infty$

- $A = \mathbb{N}$.
  $0 = \min A = \inf A$. $m(\mathbb{N}) = (-\infty, 0]$
  $M(\mathbb{N}) = \emptyset$ cioè $\mathbb{N}$ non è limitato superiormente e $\sup \mathbb{N} = +\infty$.

- $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$



  $1 = \max A = \sup A$.
  $\nexists \min A$ e $\inf A = 0$

Le definizioni di sup e inf sono utilizzate per definire molti numeri reali. Ad esempio, possiamo definire:

$$\sqrt{2} := \sup\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \wedge x^2 < 2\}$$

Si può dimostrare che $(\sqrt{2})^2 = 2$

Naturalmente anche $(-\sqrt{2})^2 = 2$

OSS

Sia $x \in \mathbb{R}$ allora: $\quad x^2 = 2 \iff x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$.

DIM

$x^2 = 2 \iff x^2 - 2 = 0 \iff x^2 - (\sqrt{2})^2 = 0$

$\iff (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) = 0$

$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$

$\iff x+\sqrt{2} = 0 \vee x - \sqrt{2} = 0$

$\iff x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$

Possiamo dire che $\sqrt{2}$ è l'unico numero positivo che elevato al quadrato ci dà 2.

Def: Sia $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$. Allora $\exists!\, x \in \mathbb{R}$ tale che $x \geq 0$ e $x^2 = y$. Tale numero si dice RADICE QUADRATA di y e si indica con $\sqrt{y}$.

(Si può far vedere che $\sqrt{y} = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \wedge x^2 \leq y\}$)

Ricordare:

- $\sqrt{y}$ è definita solo se $y \geq 0$ (NON si può fare $\sqrt{-10}$)
- $\sqrt{y} \geq 0 \quad \forall\, y \geq 0$
- $\sqrt{y} > 0 \quad \forall\, y > 0$

Def: Sia $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$ e sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, n pari. Allora $\exists!$ $x \in \mathbb{R}$ t.c. $x \geq 0$ e $x^n = y$. Tale numero si dice RADICE N-ESIMA di y e si indica con $\sqrt[n]{y}$.

(esiste ed è unico)

Def Sia $y \in \mathbb{R}$ e sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, n dispari. Allora $\exists!$ $x \in \mathbb{R}$ tale che $x^n = y$. Tale numero si dice RADICE N-SIMA di y e si indica con $\sqrt[n]{y}$.

Ricordare

- Se n è pari: $\sqrt[n]{y}$ è definita solo per $y \geq 0$.
  $\sqrt[n]{y} \geq 0 \quad \forall\, y \geq 0$.
  $\sqrt[n]{y} > 0 \quad \forall\, y > 0$
- Se n è dispari: $\sqrt[n]{y}$ è definita $\forall\, y \in \mathbb{R}$
  $\sqrt[n]{y}$ ha sempre lo stesso segno di y.
  $\sqrt[n]{y} \neq 0 \quad \forall\, y \neq 0$

ESEMPI

- $\sqrt[6]{-16}$ non è definita (in $\mathbb{R}$)
- $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$
- $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$ $\qquad$ $\sqrt{x^2}$ non sempre è uguale a x
- $\sqrt{4} = 2$
  $x^2 = 4$ ha per soluzione $x = 2 \vee x = -2$ $(x = \pm 2)$
- $x^2 = y$
  - Se $y > 0$ ci sono due soluzioni: $x = \sqrt{y}$, $x = -\sqrt{y}$
  - Se $y = 0$, $x = 0$ è l'unica soluzione
  - Se $y < 0$, no soluzioni.

Altri numeri che si possono definire tramite sup:

- **NUMERO DI NEPERO:**

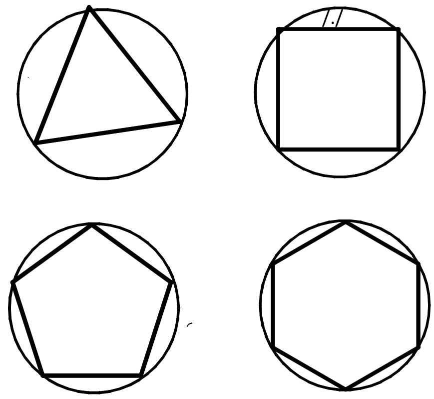
$$e := \sup\left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \right\}$$

$e \simeq 2{,}71\ldots$ (è un numero irrazionale)

- **π PI GRECO**

$$\pi := \frac{1}{2} \sup\{ P_n \mid n \in \mathbb{N},\ n \geq 3 \}$$

dove P_n è il perimetro del poligono regolare inscritto nella circonferenza di raggio 1.



π è un numero irrazionale

$\pi = 3{,}14\ldots$

Valore assoluto di un numero reale

Def: Sia $x \in \mathbb{R}$, definiamo VALORE ASSOLUTO di x il numero
$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

ESEMPI

$|20| = 20$

$|-2| = 2$

$|0| = 0$

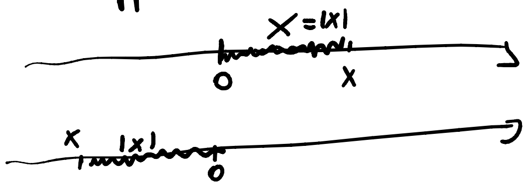
$|-3| = 3$

OSS

- $\forall x \in \mathbb{R}: \quad \sqrt{x^2} = |x|$
- Se $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ è pari: $\forall x \in \mathbb{R}: \quad \sqrt[n]{x^n} = |x|$.
- Se $n \in \mathbb{N}$ è dispari: $\forall x \in \mathbb{R}: \quad \sqrt[n]{x^n} = x$.

OSS

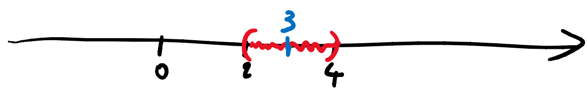
$|x|$ rappresenta la distanza di x da 0 sulla retta reale



Più in generale dati $x, y \in \mathbb{R}$, la distanza tra x e y è $|x-y|$.

Gli intervalli si possono scrivere utilizzando $|\cdot|$

$(2, 4)$



$$(2,4) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-3| < 1\}$$

PROPRIETÀ DI $|\cdot|$

1) $\forall x \in \mathbb{R}: \quad |x| \geq 0$
2) $\forall x \in \mathbb{R}: \quad |x| = 0 \iff x = 0$
3) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad |xy| = |x||y|$
4) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad |x+y| \leq |x| + |y|$ (disuguaglianza triangolare)
5) $\forall x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0: \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
6) $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall r \in \mathbb{R}: \quad |x| \leq r \iff -r \leq x \leq r$
7) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{R}: \quad |x| \geq r \iff x \geq r \ \vee \ x \leq -r$.
8) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad \big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$.

$\sqrt{2}$ si può scrivere come $x^{\frac{1}{2}}$. Più in generale possiamo definire le potenze di esponente razionale.

Def: Sia $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$. Siano $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Si definisce

$$x^{\frac{n}{m}} := \sqrt[m]{x^n} = \sqrt[m]{\underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{(n \text{ volte})}}$$

Se inoltre $x \neq 0$, possiamo definire
$$x^{-\frac{n}{m}} := \frac{1}{x^{\frac{n}{m}}} \quad \text{e} \quad x^0 = 1.$$

ESEMPI

- $2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
- $2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}$
- $\frac{1}{10^{-\frac{4}{3}}} = \frac{1}{\frac{1}{10^{\frac{4}{3}}}} = 1 \cdot \frac{10^{\frac{4}{3}}}{1} = 10^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{10000}$

Attenzione: $(-1)^{\frac{1}{3}}$ non ha un significato chiaro.
$$(-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1} = -1$$
$$(-1)^{\frac{1}{3}} = (-1)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[6]{1} = 1$$

La scrittura $x^{\frac{n}{m}}$ va usata solo quando $x \geq 0$

Cosa vuol dire 2^{π} ?

Def: Sia $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$. Sia $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $y > 0$. Possiamo definire
$$x^y := \begin{cases} \sup\{x^q \mid q \in \mathbb{Q},\ 0 < q < y\} & \text{se } x \geq 1. \\ \inf\{x^q \mid q \in \mathbb{Q},\ 0 < q < y\} & \text{se } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

Se inoltre $x \neq 0$ definiamo $x^{-y} := \frac{1}{x^y}$.

PROPRIETÀ DELLE POTENZE

1) $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall r, s \in \mathbb{R}$, $x > 0$: $x^{r+s} = x^r \cdot x^s$
2) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$ e $\forall r \in \mathbb{R}$: $(xy)^r = x^r \cdot y^r$
3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ e $\forall r, s \in \mathbb{R}$: $(x^r)^s = x^{rs}$

4) $\forall x \in \mathbb{R}, x>0$: $\quad x^{-r} = \frac{1}{x^r}$

5) $\forall x \in \mathbb{R}, x>0$ e $\forall r \in \mathbb{R}$: $\quad x^r > 0$.

6) $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$: $\quad x^0 = 1$

7) $\forall x \in \mathbb{R}$: $\quad x^1 = x$

8) $\forall x \in \mathbb{R}, x>0$ e $\forall r \in \mathbb{R}$:

$$x^r > 1 \iff (x>1 \wedge r>0) \vee (0<x<1 \wedge r<0)$$

e

$$x^r < 1 \iff (0<x<1 \wedge r>0) \vee (x>1 \wedge r<0)$$

9) $\forall x \in \mathbb{R}, x>0$ e $\forall r, s \in \mathbb{R}$:

$$r<s \implies \begin{cases} x^r < x^s & \text{se } x \geq 1 \\ x^r > x^s & \text{se } 0<x<1 \end{cases}$$

8) $\forall x, y \in \mathbb{R}, 0<x<y$ e $\forall r \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x^r < y^r & \text{se } r>0 \\ x^r > y^r & \text{se } r<0 \end{cases}$

9) Se $x \in \mathbb{R}, x>0$ e $x \neq 1$ allora : $\quad x^r = x^s \iff r = s$.

ESEMPI

- $$\frac{(5^2 \cdot 5^3)^8}{5^{15}} = \frac{(5^5)^8}{5^{15}} = \frac{5^{40}}{5^{15}} = 5^{40} \cdot 5^{-15} = 5^{25}$$

$$\left(\frac{x^r}{x^s} = x^{r-s} = \frac{1}{x^{s-r}} \right)$$

- $$2^8\, 6^{-4}\, 3^2 = 2^8 \cdot \frac{1}{6^4} \cdot 3^2 = 2^8 \frac{1}{2^4 \cdot 3^4} \cdot 3^2 = \frac{2^8}{2^4} \cdot \frac{3^2}{3^4}$$
$$= 2^4 \cdot 3^{-2} = \frac{16}{9}$$

- $$\frac{4}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2^2}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{2-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{32}$$

Attenzione:

$$(a+b)^x \neq a^x + b^x$$ (mai scrivere l'uguale)

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Invece

$$\sqrt{ab} = (ab)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}$$

Ricordiamo:

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

I coefficienti si possono ricordare con il Triangolo di Tartaglia

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Def: Un **POLINOMIO** di variabile x è una somma del tipo $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ dove $n \in \mathbb{N}$ e $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Se $a_n \neq 0$ si dice che il polinomio ha grado n ($\deg p(x) = n$)

ESEMPI

$2x + 3$ è un polinomio di grado 1

$x^2 + x + 3$ è un polinomio di grado 2

$x + x^3 - 4$ è un polinomio di grado 3

$\pi x^6 - \sqrt{3} x^5$ è un polinomio di grado 6

$\cancel{\sqrt{x}}$

$\cancel{2x^{\frac{1}{2}} - 3}$

Vogliamo risolvere equazioni del tipo $p(x) = 0$ o disequazioni del tipo $p(x) > 0$, $p(x) < 0$, $p(x) \geq 0$, $p(x) \leq 0$ dove $p(x)$ è un polinomio.