LEZIONE 19

giovedì 10 novembre 2022 09:06

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Derivate di funzioni elementari

$$\frac{d}{dx} c = 0$$

$$\frac{d}{dx} x =$$

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \log a$$

$$\frac{d}{dx} |x| = \frac{|x|}{x} \qquad x \neq 0.$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad x > 0.$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

$$(c\, f(x))' = c\, f'(x)$$

$$(f(x)\, g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g(x)^2}$$

$$(g(f(x)))' = g'(f(x))\, f'(x)$$

ESEMPI

- $(7x^3+3x-2)' = 21x^2+3$
- $(e^x \cos x)' = e^x \cos x + e^x(-\sin x)$
  $= e^x(\cos x - \sin x)$
- $\left(e^{\sin x}\right)' = e^{\sin x} \cdot \cos x$
- $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
- $\left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \cdot \cos x = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$

  $\left(\text{oppure: } \frac{0 \cdot \sin x - 1 \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)$
- $(x^2 \tan x)' = 2x \tan x + x^2(1+\tan^2 x)$
  $= 2x \tan x + x^2 + x^2 \tan^2 x.$
- $(x^2 e^{-2x})' = 2x e^{-2x} + x^2 e^{-2x} \cdot (-2)$
  $= 2x e^{-2x}(1-x)$

$\left(\frac{x^2}{e^{2x}}\right)' = \frac{2x e^{2x} - x^2 e^{2x} \cdot 2}{e^{4x}} = \frac{e^{2x}(2x-2x^2)}{e^{4x}}$

$= e^{-2x}\, 2x(1-x)$

Nota:

$$\left(f(x)g(x)h(x)\right)' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)\left(g(x)h(x)\right)'$$
$$= f'(x)g(x)h(x) + f(x)\left(g'(x)h(x) + g(x)h'(x)\right)$$
$$= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

- $(x\cos x\, e^{-x})' = \cos x\, e^{-x} - x\sin x\, e^{-x} - x\cos x\, e^{-x}$
- $\left(\sqrt{1+e^{x^2}}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+e^{x^2}}}\left(1+e^{x^2}\right)'$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1+e^{x^2}}}\left(0+e^{x^2}\cdot 2x\right) = \frac{x e^{x^2}}{\sqrt{1+e^{x^2}}}$$

TEOREMA (DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA)

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \to f(I)$ biettiva.
Sia $f^{-1}: f(I) \to I$ la funzione inversa di f.
Sia $x_0 \in I$. Se f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$ allora
f^{-1} è derivabile in $f(x_0)$ e

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Spesso è utile leggere la formula come:

$$f'(x_0) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x_0))}$$

ESEMPI

- $f(x) = \log x$

$$f^{-1}(x) = e^x$$
$$(f^{-1})'(x) = e^x$$
$$(f^{-1})'(f(x)) = e^{\log x} = x$$

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \frac{1}{x}$$

$\forall\, x > 0.$

Ricordare
$$(\log x)' = \frac{1}{x}.$$

- $f(x) = \arctan x$

$f^{-1}(x) = \tan x$

$(f^{-1})'(x) = 1 + \tan^2 x$

$(f^{-1})'(\arctan x) = 1 + (\tan(\arctan x))^2$
$= 1 + x^2$

Quindi:

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.}$$

- $f(x) = \arcsin x$
  $x \in [-1, 1]$, $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$f^{-1}(x) = \sin x$

$(f^{-1})' = \cos x$

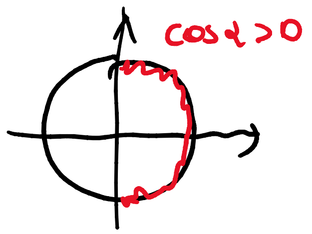
$(f^{-1})'(\arcsin x) = \cos(\arcsin x)$

Se $\alpha \in \mathbb{R}$: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$|\cos\alpha| = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$

Se $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$: $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$

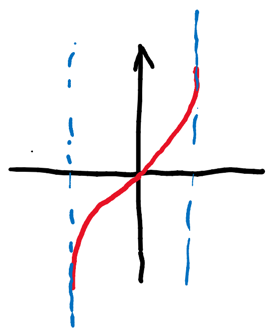


allora

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

Quindi:

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad x \in (-1, 1)}$$



$\arcsin x$ è derivabile in $(-1, 1)$
ma non in -1 e in 1.

- $f(x) = \arccos x$

  $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall\, x \in (-1, 1)$

Riepilogo delle nuove derivate:

- $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$
- $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

OSS

$$(\log|x|)' = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{|x|}{x} = \frac{1}{x} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

OSS 2

Come fatto per log si dimostra che

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}$$

ALTRI ESEMPI DI DERIVATE

1) $$\left(\frac{x^3}{\log x}\right)' = \frac{3x^2 \log x - x^3 \cdot \frac{1}{x}}{\log^2 x} = \frac{x^2(3\log x - 1)}{\log^2 x}$$

2) $$\log\left(\frac{3x+1}{x^2-1}\right) = f(x)$$

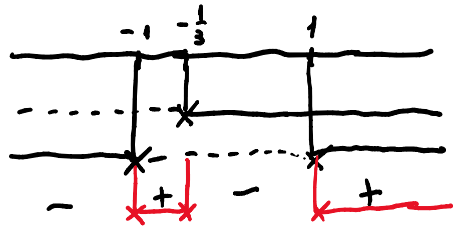
Determiniamo il dominio e calcoliamo la derivata.

Dom(f):

$$\begin{cases} \dfrac{3x+1}{x^2-1} > 0 \\ x^2-1 \neq 0 \end{cases}$$

N: $3x+1 > 0 \iff x > -\frac{1}{3}$

D: $x^2-1 > 0 \iff x > 1 \ \vee\ x < -1$



$-1 < x < -\frac{1}{3} \ \vee\ x > 1$

$$\mathrm{Dom}(f) = \left(-1, -\frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty).$$

Calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = \left(\log\left(\frac{3x+1}{x^2-1}\right)\right)' = \frac{1}{\frac{3x+1}{x^2-1}} \left(\frac{3x+1}{x^2-1}\right)'$$

$$= \frac{x^2-1}{3x+1}\left(\frac{3(x^2-1) - (3x+1)\,2x}{(x^2-1)^2}\right)$$

$$= \frac{\cancel{x^2-1}}{3x+1} \; \frac{3x^2-3-6x^2-2x}{(x^2-1)^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{-3x^2-2x-3}{(3x+1)(x^2-1)} = -\frac{3x^2+2x+3}{(3x+1)(x^2-1)}$$

3) $f(x) = \arctan\left(\sqrt{x^3+1}\right)$

$$\mathrm{Dom}(f): \quad x^3+1 \geq 0$$
$$x^3 \geq -1$$
$$x \geq -1$$

$$\mathrm{Dom}(f) = [-1, +\infty).$$

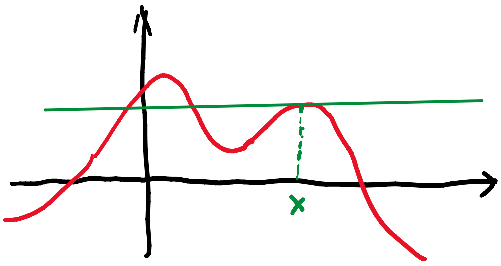
$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\sqrt{x^3+1}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{x^3+1}\right)'$$

$$= \frac{1}{1+x^3+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^3+1}} \cdot 3x^2$$

$$= \frac{3x^2}{2(x^3+2)\sqrt{1+x^3}} \qquad x > -1 .$$

Si può dimostrare che f non è derivabile in -1

Abbiamo definito i punti max e min locale



TEOREMA DI FERMAT

Sia $f:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $-\infty \le a < b \le +\infty$. Sia x_0 un punto di massimo o minimo locale per f in (a,b). Se f è derivabile in x_0 allora $f'(x_0) = 0$.

DIM

Supponiamo che x_0 sia un punto di min. locale per f.
Allora $\exists U \in I_{x_0}$ t.c. $f(x_0) \le f(x)$ $\forall x \in (a,b) \cap U$.
Allora $\forall x \in U \cap (a,b)$ si ha che

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0 \quad \text{se } x > x_0$$

e $$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0 \quad \text{se } x < x_0$$

Suppongo che f è derivabile in x_0 quindi

$$\exists f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Ma siccome

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0 \quad \forall x \in U \cap (a,b),\ x > x_0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0$$

(per i corollari del teorema della permanenza del segno).

Allo stesso modo

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \quad \forall x \in U \cap (a,b), \; x < x_0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0.$$

Allora

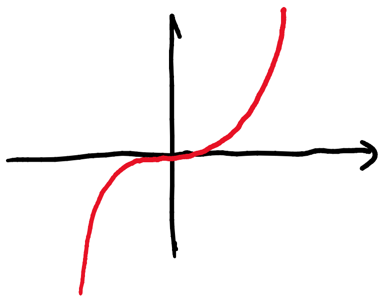
$$\left.\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \\ \text{e } f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0. \end{aligned}\right\} \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

$\square$

OSS

Il teorema dice che se x_0 è max / min locale allora $f'(x_0)=0$.
Ma non tutti i punti in cui $f'(x_0)=0$ sono massimi o minimi

ESEMPIO



$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

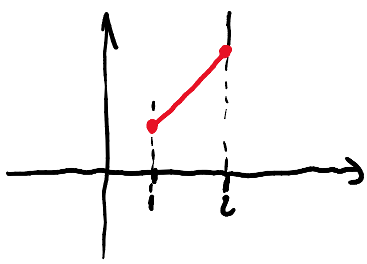
$f'(0) = 0$

ma 0 non è né un massimo né un minimo locale.

OSS

Il teorema non vale negli intervalli chiusi:

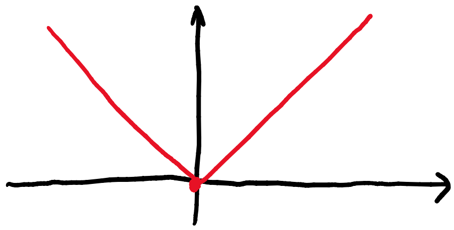
$f(x) = x$ in $[1,2]$



1 è punto di min locale in $[1,2]$
2 è punto di max locale in $[1,2]$
ma $f'(x) = 1 \neq 0$.

OSS

Può succedere che f non sia derivabile nei suoi punti di massimo o minimo locale.



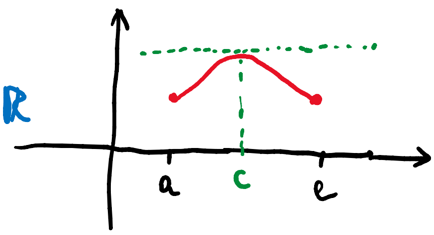
0 è punto di min locale ma f non è derivabile in 0.

OSSERVAZIONE FINALE:

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione con I intervallo.
Se $x_0 \in I$ è un punto di max o min locale per f in I allora ci sono tre possibilità:

1) $x_0 \in \mathring{I}$ (interno di I) e f è derivabile in x_0.
   In questo caso $f'(x_0) = 0$.
2) x_0 è uno degli estremi di I
3) f non è derivabile in x_0.

TEOREMA DI ROLLE



Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Se $f(a) = f(b)$, allora $\exists\, c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = 0$.

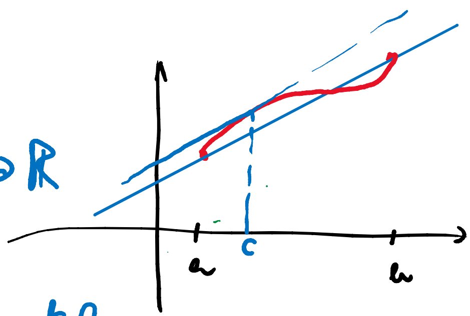
DIM

Siccome f è continua allora $\exists\, x_1, x_2 \in (a,b)$ tali che $f(x_1) = \max_{[a,b]} f$ e $f(x_2) = \min_{[a,b]} f$. (Teo. di Weierstrass)
Ci sono due casi:

1) $f(x_1) = f(x_2)$: in questo caso f è costante in $[a,b]$ e quindi $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

Si prende come c qualsiasi punto di (a, b)

2) Se $f(x_1) \neq f(x_2)$, siccome $f(a) = f(b)$ allora una tra x_1 e x_2 appartiene ad (a, b).
Questo punto (chiamiamolo c) è un punto di max o min locale per f. Quindi per il teorema di Fermat $f'(c) = 0$.



TEOREMA DI LAGRANGE

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Allora $\exists\, c \in (a, b)$ tale che
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

DIM

Sia
$$g(x) = f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a) \right)$$

Si applica il teorema di Rolle a questa funzione: g è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) perché differenza di funzioni continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b).

$$g(a) = f(a) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot 0 + f(a) \right) = f(a) - f(a) = 0$$

$$g(b) = f(b) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{\cancel{b - a}} \cdot \cancel{(b - a)} + f(a) \right)$$

$$= f(b) - \left(f(b) - \cancel{f(a)} + \cancel{f(a)} \right) = 0$$

Sono verificate tutte le ipotesi del teorema di Rolle. quindi $\exists\, c \in (a,b)$ tale che $g'(c) = 0$.

$$g'(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$g'(c) = 0$ vuol dire $\quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

TEOREMA (CRITERIO DI MONOTONIA)

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile in I. Allora valgono le seguenti equivalenze:

1) f è monotona crescente in $I \iff f'(x) \geq 0$ in I
2) f è monotona decrescente in $I \iff f'(x) \leq 0$ in I
3) f è monotona strettamente crescente in $I \Rightarrow f'(x) \geq 0$ in I
4) Se $f'(x) > 0 \ \forall x \in I \Rightarrow f$ è strettamente monotona crescente in I
5) f è monotona strettamente decrescente in $I \Rightarrow f'(x) \leq 0$ in I
6) $f'(x) < 0 \ \forall x \in I \Rightarrow f$ è strettamente monotona decrescente in I.

ESEMPIO

$f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 1$ in $[1, 3]$

Determiniamo i punti di max/min locale per f in $[1,3]$

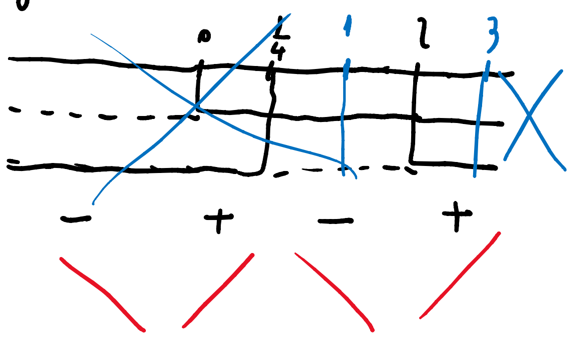
$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 2x$$
$$= x(4x^2 - 9x + 2)$$

$f'(x) = 0 \iff x = 0 \ \vee \ 4x^2 - 9x + 2 \qquad \Delta = 81 - 32 = 49$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm 7}{8} \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow \frac{1}{4} \end{matrix}$$

$$f'(x) = 0 \iff x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{1}{4} \quad \vee \quad x = 2$$

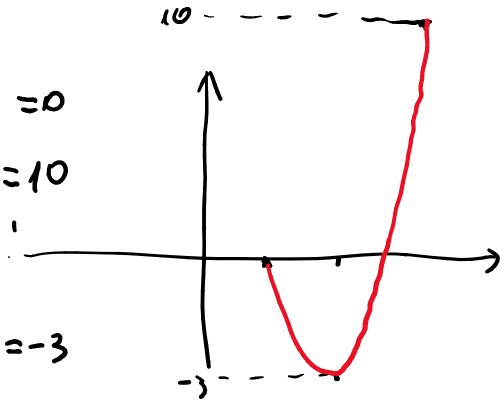
segno della derivata



$f(1) = 0$

$f(3) = 10$

$f(2) = -3$



Conclusione:

- $x = 2$ è l'unico punto di min locale in $[1,3]$
- $x = 1$ e $x = 3$ sono punti di max locale in $[1,3]$.