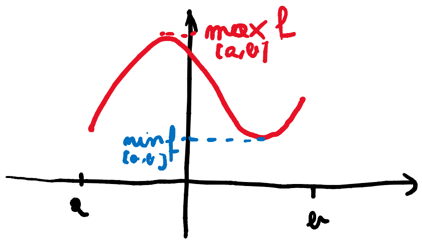
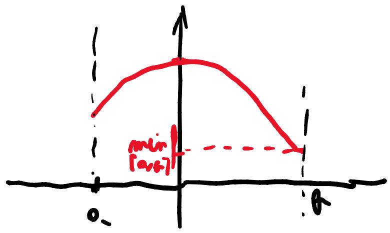
LEZIONE 18

mercoledì 9 novembre 2022 08:58

Teorema di Weierstrass

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, e sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$. Allora $\exists \max_{[a,b]} f$ e $\min_{[a,b]} f$.





OSS

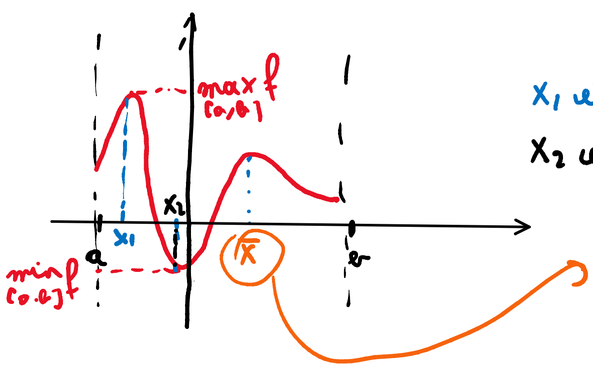
Il teorema ci dice anche che $\exists\, x_1, x_2 \in [a, b]$ tali che

$$f(x_1) = \max_{[a,b]} f$$

$$f(x_2) = \min_{[a,b]} f$$

Def Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in X$. Si dice che x_0 è un PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO per f in X se $f(x_0) = \max_X f$ (cioè $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in X$).

Si dice che x_0 è un PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO per f in X se $f(x_0) = \min_X f$ (cioè $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in X$)



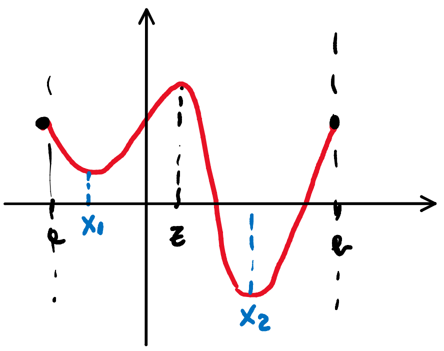
x_1 è un punto di max. assoluto

x_2 è un punto di min. assoluto

Attenzione: $\bar{x}$ NON è un punto di massimo assoluto

Def: Sia $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in X$. Si dice che x_0 è un PUNTO DI MINIMO LOCALE per f in X se $\exists\, U \in I_{x_0}$ tale che $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in X \cap U$.

Si dice che x_0 è PUNTO DI MASSIMO LOCALE per f in X se $\exists\, U \in I_{x_0}$ t.c. $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in X \cap U$.



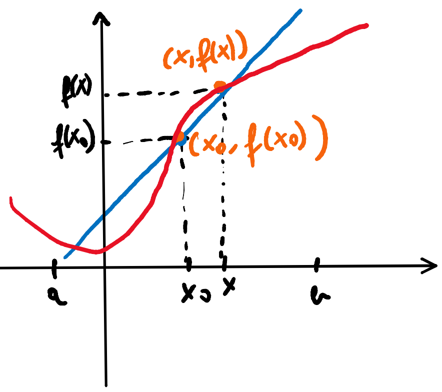
x_1, x_2 sono punti di minimo locale per f.

a, b, z sono punti di max. locale.

Nota: z è l'unico punto di max assoluto mentre x_2 è l'unico punto di min. assoluto.

Derivate:

Idea: vogliamo definire la "pendenza" del grafico di una funzione in un punto del suo dominio.



La retta passante per $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$ ha equazione $y = mx + q$ dove

$$\begin{cases} f(x_0) = m x_0 + q \\ f(x) = m x + q \end{cases}$$

$$f(x) - f(x_0) = m(x - x_0)$$

da cui $m = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Def: La quantità $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ si dice RAPPORTO INCREMENTALE di f nel punto x_0 con incremento $x-x_0$.

Per definire la "pendenza" del grafico nel punto $(x_0, f(x_0))$ possiamo calcolare $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Def: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: X \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in X \cap D(X)$.
Si dice che f è DERIVABILE in x_0 se $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$ (cioè il limite esiste ed è finito).
Tale limite si dice DERIVATA di f nel punto x_0 e si indica con $f'(x_0)$.

OSS

Se $h = x - x_0$ allora il limite si riscrive come:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Molto spesso il punto in cui calcoliamo la derivata non lo indicheremo con x_0 ma con x. Scriveremo quindi

$$f'(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Ci sono anche altri modi per indicare la derivata:

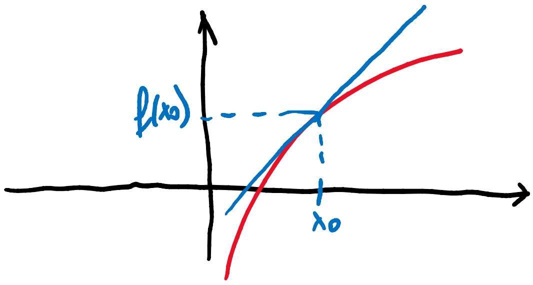
$$f'(x), \quad \frac{d}{dx}f(x), \quad \dot{f}(x), \quad f^{(1)}(x), \quad (f(x))'$$

Def: Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in X \cap D(X)$.
Se f è derivabile in x_0 allora definiamo RETTA TANGENTE al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ la retta di equazione $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

$\left(m = f'(x_0) \text{ e } q = f(x_0) - f'(x_0)\,x_0 \right)$.

Interpretazione geometrica di f'.

$f'(x_0)$ è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$.



oss La retta tangente è la retta che approssima meglio il grafico di f vicino a $(x_0, f(x_0))$ nel senso che se $m, q \in \mathbb{R}$ allora:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - (mx+q)}{x - x_0} = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = f'(x_0) \\ q = f(x_0) - f'(x_0)\,x_0. \end{cases}$$

oss

Se f è derivabile in x_0, allora f è continua in x_0.

oss

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) + f(x_0)$$

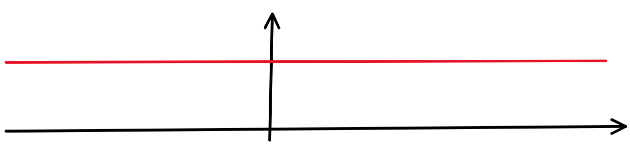
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) + f(x_0) = f'(x_0)\cdot 0 + f(x_0)$$

$$= f(x_0)$$

Derivate di (alcune) funzioni elementari:

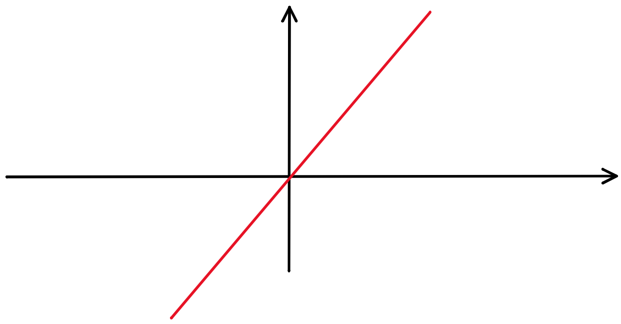
1) Funzioni costanti

$f(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}$



$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

2) $f(x) = x$

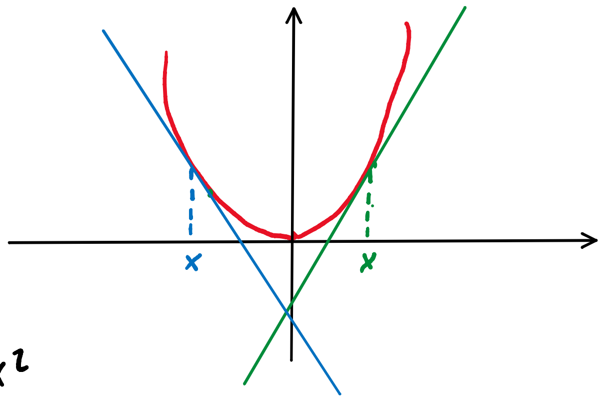


$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x} + h - \cancel{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} 1 = 1.$$

3) $f(x) = x^2$



$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2hx + h^2 - \cancel{x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x$$

$$f'(x) = 2x$$

(si può scrivere $(x^2)' = 2x$, $\frac{d}{dx} x^2 = 2x$)

4) $f(x) = x^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Supponiamo: $x > 0$.

Ricordiamo il limite notevole:

$$\lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = \alpha$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^\alpha \left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - x^\alpha}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} x^\alpha \frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} x^\alpha \frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{x \, \frac{h}{x}}$$

$$= \lim_{h \to 0} x^{\alpha-1} \underbrace{\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{h}{x}}}_{\to \alpha}$$

$$= x^{\alpha-1} \cdot \alpha$$

$$= \alpha x^{\alpha-1}$$

Ricordare: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

ESEMPI

$(x^3)' = 3x^2$ $\qquad$ $(x^5)' = 5x^4$

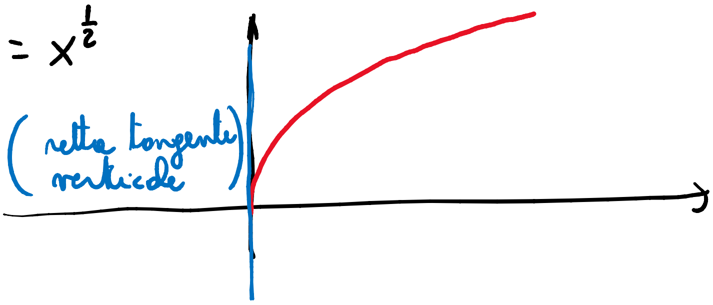
$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

Abbiamo calcolato la derivata di x^α per $x > 0$.
Se $\alpha > 0$, x^α è definita anche per $x = 0$.
Si può calcolare $f'(0)$?

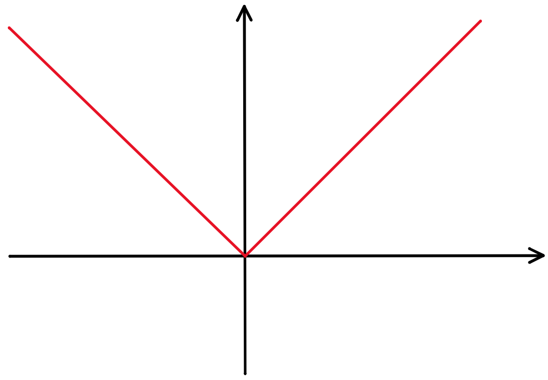
$$f'(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^\alpha}{h} = \lim_{h \to 0^+} h^{\alpha-1} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

- Se $\alpha > 1$, x^α è derivabile anche in 0 e $f'(0) = 0$.
- Se $0 < \alpha < 1$, x^α non è derivabile in 0.

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$



5) $f(x) = |x|$



f è derivabile in 0 ?

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

il limite non esiste perché:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

$$\nexists \lim_{h \to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h}$$

quindi f non è derivabile in 0.

Invece f è derivabile in x se $x \neq 0$ e

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Si può dire che

$$(|x|)' = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases} = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|}$$

---

6) $f(x) = e^x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^x (e^h - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$$

---

7) $f(x) = \sin x$

Si dimostra che $f'(x) = \cos x$

Idea:

$\operatorname{sen}(x+h) = \operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h$

Quindi:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos x + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x\,(\cos h - 1)}{h} + \cos x \cdot \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} -\operatorname{sen} x \frac{(1-\cos h)}{h^2} \cdot h + \cos x \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

$$= -\operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$$

8) $f(x) = \cos x$

$f'(x) = -\operatorname{sen} x$

Infatti:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x\,(\cos h - 1)}{h} - \operatorname{sen} x \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} -\cos x \frac{(1-\cos h)}{h^2} \cdot h - \operatorname{sen} x \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} -\cos x \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 - \operatorname{sen} x \cdot 1$$

$$= -\operatorname{sen} x$$

Riepilogo:

$(c)' = 0$

$(x)' = 1$

$(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$

$(e^x)' = e^x$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(|x|)' = \frac{|x|}{x}$ se $x \neq 0$.

TEOREMA (OPERAZIONI TRA DERIVATE)

Siano $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in X \cap D(X)$.
Se f e g sono derivabili in x_0, allora:

1) $f+g$ è derivabile in x_0 e $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2) $f-g$ è derivabile in x_0 e $(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$
3) Se $c \in \mathbb{R}$ allora cf è derivabile in x_0 e $(cf)' = cf'$.
4) $f \cdot g$ è derivabile in x_0 e $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
5) Se $g(x_0) \neq 0$ allora $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0 e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

DIM DI 1)

$$(f+g)'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - f(x_0) - g(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$
$$= f'(x_0) + g'(x_0)$$

DIM DI 4)

$$(fg)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)\,g(x_0+h) - f(x_0)\,g(x_0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)\,g(x_0+h) - f(x_0)\,g(x_0+h) + f(x_0)\,g(x_0+h) - f(x_0)\,g(x_0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)\big(f(x_0+h)-f(x_0)\big) + f(x_0)\big(g(x_0+h)-g(x_0)\big)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} g(x_0+h)\,\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + f(x_0)\,\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$
$$= f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0).$$

Le altre proprietà si dimostrano in modo simile.

ESEMPI

- $\frac{d}{dx} 5x^2 = 5 \cdot 2x = 10x$
- $\frac{d}{dx} x^3 + 4x^2 + 6x - 3 = 3x^2 + 8x + 6$
- $\frac{d}{dx} \sqrt{x} + e^x = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}} + e^x\right) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + e^x$

  $= \frac{1}{2\sqrt{x}} + e^x$ $\qquad \left[\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\right]$
- $\frac{d}{dx} x \sin x = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x\cos x.$

- $\frac{d}{dx} \frac{3x^2-1}{4x^5+1} = \frac{6x\,(4x^5+1) - 20x^4(3x^2-1)}{(4x^5+1)^2}$

$= \frac{24x^6 + 6x - 60x^6 + 20x^4}{(4x^5+1)^2}$

$= \frac{-36x^6 + 20x^4 + 6x}{(4x^5+1)^2}$

- $\frac{d}{dx} \tan x = \frac{d}{dx} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x}$

$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

(oppure $\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$)

$\boxed{\text{Ricordare: } \frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.}$

TEOREMA (DERIVATA DELLA COMPOSIZIONE)

Siano $f: X \to Y$, $g: Y \to \mathbb{R}$ con $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in X \cap D(X)$ tale che $f(x_0) \in D(Y)$. Se f è derivabile in x_0 e g è derivabile in $f(x_0)$ allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e

$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$.

$\boxed{\text{Ricordare: } (g(f(x)))' = g'(f(x))\, f'(x)}$

ESEMPI

1) $\frac{d}{dx} e^{2x}$ $\qquad e^{2x} = g(f(x))$ con $g(x) = e^x$ e $f(2x) = 2x$

$g'(x) = e^x$, $g'(2x) = e^{2x}$, $f'(x) = 2$

Per le formule delle derivate delle funzioni composte:

$$\frac{d}{dx} e^{2x} = e^{2x} \cdot f'(x) = e^{2x} \cdot 2$$

2) $$\frac{d}{dx} e^{x^2-x} = e^{x^2-x} \cdot (2x-1)$$

3) $$\frac{d}{dx} \sin(\sqrt{x}) = \cos(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4) $$\frac{d}{dx} \sqrt{1+\sin x} = \frac{1}{2\sqrt{1+\sin x}} \cdot (0+\cos x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}$$

5) $$\frac{d}{dx} \cos^3 x = 3\cos^2 x \cdot (-\sin x) = -3\cos^2 x \sin x.$$

6) $$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{\log a^x} = \frac{d}{dx} e^{x \log a} = e^{x \log a} \log a$$

$$= a^x \log a$$

$$\boxed{(a^x)' = a^x \log a.}$$

4) $$\frac{d}{dx} \sqrt[3]{4x^2-x+1}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{(4x^2-x+1)^2}} \cdot (8x-1)$$

$$= \frac{8x-1}{3\sqrt[3]{(4x^2-x+1)^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \sqrt[3]{x} = \frac{d}{dx} x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$