

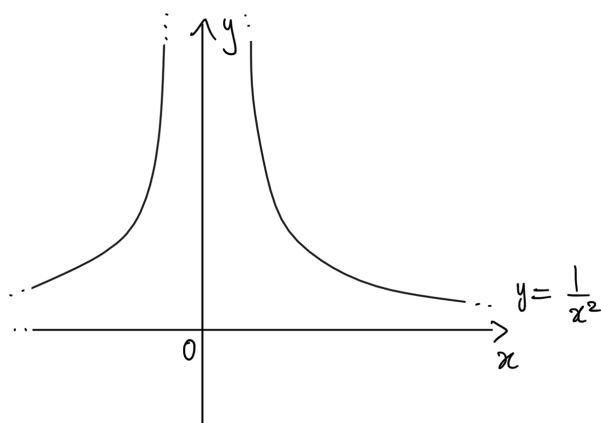
ASINTOTI

definizione Sia $f: X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e x_0 punto di accumulazione di X

Diciamo che f ha un ASINTOTO VERTICALE per $x \rightarrow x_0$ oppure che la retta di equazione $x = x_0$ è un asintoto verticale per il grafico di f

se $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \in \{+\infty, -\infty\}$

esempio $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



$x=0$ è un asintoto verticale della funzione $\frac{1}{x^2}$

definizione Sia $f: X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

1) Consideriamo x_0 punto di accumulazione sinistro di X

Diciamo che $x = x_0$ è un ASINTOTO VERTICALE da SINISTRA per il grafico di f oppure che f ha un asintoto verticale per $x \rightarrow x_0^-$ se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$$

2) Consideriamo x_0 punto di accumulazione destro di X

Diciamo che $x = x_0$ è un ASINTOTO VERTICALE da DESTRA per il grafico di f oppure che f ha un asintoto verticale per $x \rightarrow x_0^+$ se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$

Esempi di asintoti verticali (funzioni elementari)

- $x=0$ è un asintoto verticale di $\frac{1}{x^m}$ per ogni $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- $x=0$ è un asintoto verticale da destra di x^α per ogni $\alpha < 0$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)
- $x=0$ è un asintoto verticale da destra di $\log_a x$ per ogni $a \in (0, +\infty)$
 $a \neq 1$
- $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ è un asintoto verticale di $\tan x$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$
- $x = k\pi$ è un asintoto verticale di $\cot x$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$

Esempi:

1) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$\Rightarrow f$ ha un asintoto verticale per $x \rightarrow 0^+$
ma non per $x \rightarrow 0^-$

2) $f(x) = \frac{x+1}{x^2(x^2-4)}$ $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$

Abbiamo visto nella [Lezione 15, Esercizio 1] che

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

Con il linguaggio che abbiamo appena introdotto possiamo dire che

$x=0$ e $x=\pm 2$ sono asintoti verticali nel grafico di f

definizione Siano $f: X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $l \in \mathbb{R}$

1) Se X illimitato superiormente (cioè $+\infty$ è punto di accumulazione per X)

Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ diciamo che la retta di equazione $y = l$

è un ASINTOTO ORIZZONTALE per $x \rightarrow +\infty$ al grafico di f

2) Se X illimitato inferiormente (cioè $-\infty$ è punto di accumulazione per X)

Se $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ diciamo che la retta di equazione $y = l$

è un ASINTOTO ORIZZONTALE per $x \rightarrow -\infty$ al grafico di f

Esempi di asintoti orizzontali (funzioni elementari)

• $y = 0$ è un asintoto orizzontale di $\frac{1}{x^m}$ sia per $x \rightarrow +\infty$ che per $x \rightarrow -\infty$
($m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)

• $y = 0$ è un asintoto orizzontale di x^α per $x \rightarrow +\infty$ per ogni $\alpha < 0$
($\alpha \in \mathbb{R}$)

• $y = 0$ è un asintoto orizzontale di a^x per $x \rightarrow -\infty$ se $a > 1$
per $x \rightarrow +\infty$ se $a \in (0, 1)$

• $y = \frac{\pi}{2}$ è un asintoto orizzontale di $\arctg$ per $x \rightarrow +\infty$

$y = -\frac{\pi}{2}$ è un asintoto orizzontale di $\arctg$ per $x \rightarrow -\infty$

Esempi

1) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

$y = 1$ è asintoto orizzontale cioè per $x \rightarrow +\infty$ che per $x \rightarrow -\infty$

2) $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x+1}$ $\text{dom}(f) = [0, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \stackrel{[+\infty - \infty]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x+1}) \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} = 0^-$$

$$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$$

$y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$

Definizione Siano $f: X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $q \in \mathbb{R}$.

1) Supponiamo X illimitato superiormente.

Diciamo che la retta di equazione $y = mx + q$ è un ASINTOTO OBLIQUO al grafico di f per $x \rightarrow +\infty$ se $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$

2) Supponiamo X illimitato inferiormente

Diciamo che la retta di equazione $y = mx + q$ è un ASINTOTO OBLIQUO al grafico di f per $x \rightarrow -\infty$ se $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$

Osservazione Come possiamo stabilire se una f ha un asintoto obliquo?

Ovviamente se f ha un asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$ (rispettivamente $x \rightarrow -\infty$) allora f non può avere un asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$ (rispettivamente per $x \rightarrow -\infty$)

Concentriamoci ora sul caso $x \rightarrow +\infty$ (il caso $x \rightarrow -\infty$ è completamente analogo)

Se $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} =: m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ed $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) =: q \in \mathbb{R}$

allora $y = mx + q$ è un asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$

Esempi

1) $f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$ $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Controlliamo se f ammette asintoti obliqui.

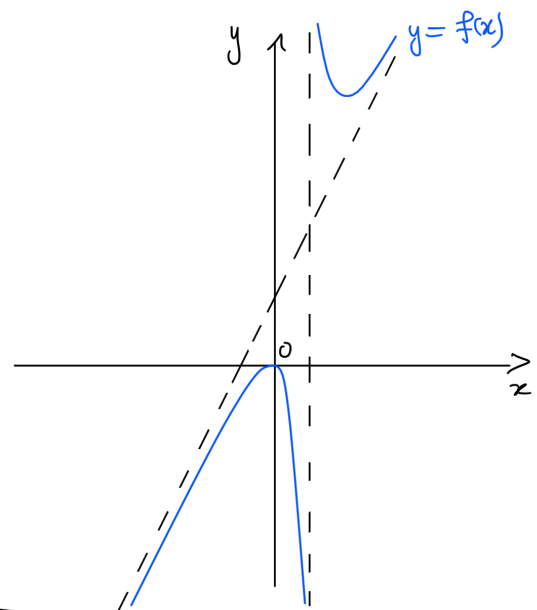
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$$

$$\text{analogamente } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^2}{x-1} - 2x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 2x(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$$

$y = 2x + 2$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$ e per $x \rightarrow -\infty$



$$2) f(x) = \sqrt[3]{x^2 + \frac{x^3}{8}} \quad \text{dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt[3]{1 + \frac{8}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt[3]{1 + \frac{8}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{1 + \frac{8}{x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{x^3}{8} + x^2} - x \right) \quad [+\infty - \infty]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt[3]{1 + \frac{8}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[3]{1 + \frac{8}{x}} - 1 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{8}{x} \cdot \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{8}{x}} - 1}{\frac{8}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 8 \cdot \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{8}{x}} - 1}{\frac{8}{x}}$$

$$= 8 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{3}} - 1}{x} = \frac{1}{3}$$

$y = x + \frac{8}{3}$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$

ma anche per $x \rightarrow -\infty$

$$3) \quad f(x) = -2x + 1 + \ln(e^{3x-1} + 1) \quad \text{dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-2x + 1 + \ln \left(e^{3x-1} \left(1 + \frac{1}{e^{3x-1}} \right) \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-2x + 1 + \ln(e^{3x-1}) + \ln \left(1 + \frac{1}{e^{3x-1}} \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-2x + 1 + 3x - 1 + \ln \left(1 + \frac{1}{e^{3x-1}} \right) \right) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \boxed{\ln e^{g(x)} = g(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \ln \left(1 + \frac{1}{e^{3x-1}} \right) \right) = +\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-2x + 1 + \ln(e^{3x-1} + 1) \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln \left(1 + \frac{1}{e^{3x-1}} \right)}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + \ln \left(1 + \frac{1}{e^{3x-1}} \right) - x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{e^{3x-1}} \right) = 0 \end{aligned}$$

$y = x$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + 1 + \ln(e^{3x-1} + 1)}{x} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 2x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \ln(e^{3x-1} + 1)) = 1$$

$y = -2x + 1$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$