LEZIONE 16

lunedì 7 novembre 2022 08:59

Non sempre $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste. Ad esempio:

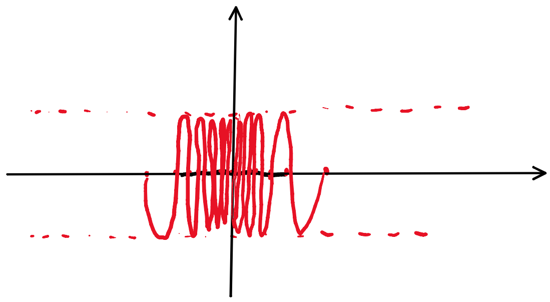
- $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ $\nexists$ perché $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ e $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Può succedere che neanche $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e/o $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ esistano:

- Ad esempio: $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

$\nexists \lim_{x \to 0^+} \sin \frac{1}{x}$

$\nexists \lim_{x \to 0^-} \sin \frac{1}{x}$



TEOREMA (ESISTENZA DI LIMITI PER FUNZIONI MONOTONE)

Sia I un intervallo con $a = \inf I$, $b = \sup I$. Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione monotona in I. Allora $\exists \lim_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim_{x \to b^-} f(x)$.

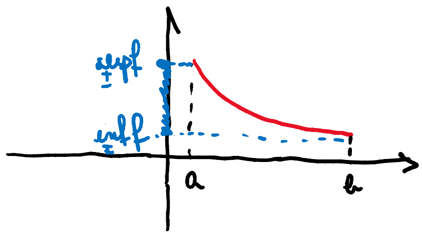
Inoltre si ha che:

1) Se f è crescente in I:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \inf_{(a,b)} f \quad \text{e} \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = \sup_{(a,b)} f.$$

2) Se f è decrescente in I:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \sup_{(a,b)} f \quad \text{e} \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = \inf_{(a,b)} f$$



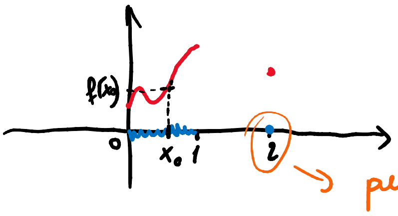
FUNZIONI CONTINUE

Def: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e siano $f: X \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in X$. Si dice che f è **CONTINUA** in x_0 se vale una delle seguenti condizioni:

1) $x_0 \in D(X)$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
2) $x_0 \notin D(X)$ (in tal caso, si dice che x_0 è un **PUNTO ISOLATO** di X).

$X = [0,1) \cup \{2\}$, $f: X \to \mathbb{R}$

$D(X) = [0,1]$



punto isolato di X

OSS

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e siano $f: X \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$. Allora sono equivalenti:

1) f è continua in x_0.

2) $\forall\, V$ intorno di $f(x_0)$ $\exists\, U$ intorno di x_0 tale che $f(x) \in V \quad \forall x \in U \cap X$.

3) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tale $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon,\ f(x_0) + \varepsilon)$ $\forall\, x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$.

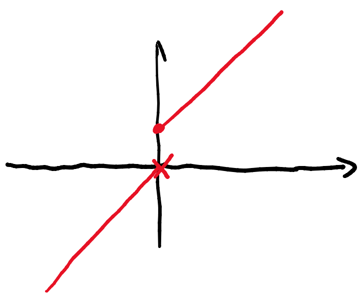
ESEMPI

1) $f(x) = x$ è continua in $x_0 \quad \forall\, x_0 \in \mathbb{R}$ perché $\lim_{x \to x_0} x = x_0$ (cioè $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$)

Def: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un insieme, $f: X \to \mathbb{R}$. Sia $A \subseteq X$ un insieme. Si dice che f è CONTINUA in A se f è continua in tutti i punti di A.

Possiamo dire che $f(x) = x$ è continua in $\mathbb{R}$

2) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ x+1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$



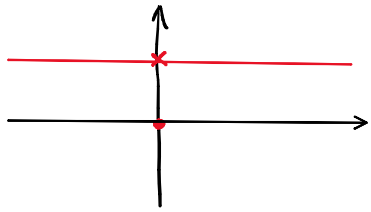
f non è continua in 0 perché:

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x + 1 = 1$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x = 0$

Quindi $\lim_{x \to 0} f(x) \nexists$ (in particolare: $\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(x_0)$)

3) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$



f non è continua in 0 perché

$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ mentre $f(0) = 0$.

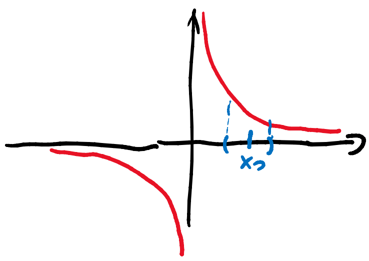
Si può dire che f è continua in x_0 $\forall x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(cioè f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$)

4) $f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

f è continua in $\mathbb{R}$ $\left(\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \right)$

5) $f(x) = \frac{1}{x}$



f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

è continua in 0?

NO perché $0 \notin \mathrm{Dom}(f)$.

6) Più in generale tutte le funzioni elementari che abbiamo introdotto sono continue nel loro dominio:

- x^α con $\alpha \in \mathbb{R}$
- a^x e $\log_a x$
- $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$

TEOREMA

Siano $f: X \to \mathbb{R}$, $g: X \to \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}$.
Sia $x_0 \in X$. Se f e g sono continue in x_0 allora:

1) $f + g$ è continua in x_0
2) $f - g$ è continua in x_0
3) $c f$ è continua in x_0 $\forall c \in \mathbb{R}$
4) $f g$ è continua in x_0
5) Se $g(x_0) \neq 0$, allora $\frac{f}{g}$ è continua in x_0.

ESEMPI

1) $f(x) = x^4 + x - 3$
è continua in $\mathbb{R}$ perchè somma di funzioni continue in $\mathbb{R}$.

2) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^4+1}$ è continua in $\mathbb{R}$

è continua in $\mathbb{R}$.
$(x^4+1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R})$

perchè è rapporto di funzioni continue in $\mathbb{R}$ e il denominatore non si annulla mai

3) $f(x) = \dfrac{2x+3}{4x^4-1}$

$$\begin{aligned} 4x^4-1=0 &\iff 4x^4=1 \\ &\iff x^4=\frac{1}{4} \\ &\iff \sqrt[4]{x^4}=\sqrt[4]{\frac{1}{4}} \\ &\iff |x|=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\iff x=\frac{1}{\sqrt{2}} \vee x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

f è continua in $\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\}$

Metodo alternativo:

$4x^4-1=0$

$(2x^2-1)\underbrace{(2x^2+1)}_{\neq 0}=0$

$2x^2-1=0$

$(\sqrt{2}x)^2-1=0$

$(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)=0 \iff x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \vee x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

TEOREMA (CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI COMPOSTE)

Siano $f_1: X \to Y$, $f_2: Y \to \mathbb{R}$ due funzioni e sia $x_0 \in X$. Se f_1 è continua in x_0 e f_2 è continua in $f_1(x_0)$ allora la composizione $f_2 \circ f_1$ è continua in x_0.

ESEMPIO

1) $\sin(5x^2+1) = f_2(f_1(x))$

$f_1: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 5x^2+1 \end{array}$ e $f_2: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sin x \end{array}$

2) $f(x) = \sqrt{5-2x}$ $\left(5-2x \geq 0 \iff x \leq \frac{5}{2}\right)$

$\mathrm{Dom}(f) = \left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$

f è una composizione di funzioni:

$f_1: \begin{array}{l} \left(-\infty, \frac{5}{2}\right] \longrightarrow [0,+\infty) \\ x \longmapsto 5-2x \end{array}$ $f_2: \begin{array}{l} [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{array}$

$f = f_2 \circ f_1$ è continua in $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$

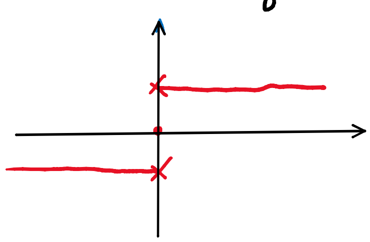
TEOREMA (CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE INVERSA)

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \to f(I)$ una funzione continua e iniettiva in I. Allora $f^{-1}: f(I) \to \mathbb{R}$ è continua in $f(I)$.

Altri esempi di funzioni non continue

Funzione segno

$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \operatorname{sgn} x \end{array}$ dove $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$



f non è continua in x_0

perché $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1$

e $\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1$

Funzione PARTE INTERA

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \lfloor x \rfloor$$ dove $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } n \leq x\}$

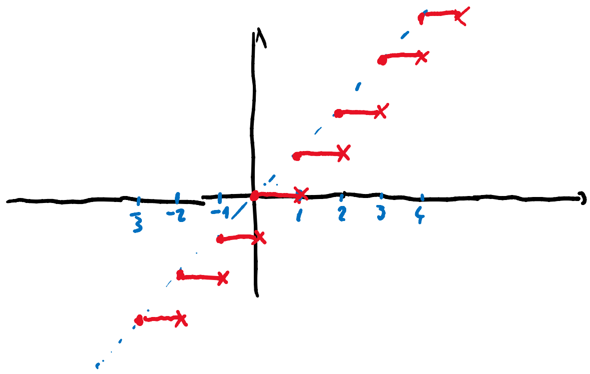
$\lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$

$\lfloor \frac{5}{3} \rfloor = 1$

$\lfloor 2{,}725 \rfloor = 2$

$\lfloor -1{,}1 \rfloor = -2$

$\lfloor 5 \rfloor = 5$



f è continua in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ mentre non è continua nei punti di $\mathbb{Z}$

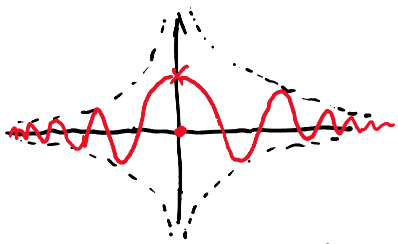
Classificazione dei punti di discontinuità

Def Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un insieme e siano $f: X \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$. Si dice che x_0 è un PUNTO DI DISCONTINUITÀ per f se f non è continua in x_0.

Def: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e siano $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in X$. Si dice che x_0 è un PUNTO DI DISCONTINUITÀ ELIMINABILE se $x_0 \in D(X)$ e $\exists$ finito $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ma tale limite è diverso da $f(x_0)$.

ESEMPI

1) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$



In questo caso $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ma $1 \neq f(0) = 0$.

f ha una discontinuità eliminabile in $x_0 = 0$.

Se consideriamo:

$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

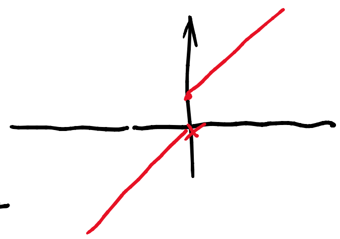
g è continua in $\mathbb{R}$.

Def: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in X$. Si dice che x_0 è un PUNTO DI DISCONTINUITÀ DI SALTO (o DI PRIMA SPECIE) se $x_0 \in D^+(X) \cap D^-(X)$ e si ha che

1) $\exists$ finiti $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$

2) $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$.

1) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ x+1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$



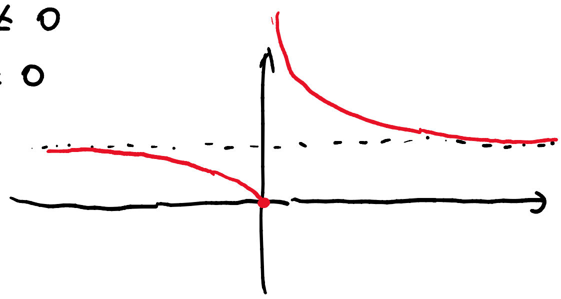
ha una discontinuità di salto in $x_0 = 0$.

2) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ ha un salto in $x_0 = 0$.

Def: Diremo che x_0 è un PUNTO DI DISCONTINUITÀ DI SECONDA SPECIE se x_0 è un punto di discontinuità che non è eliminabile né di salto.

ESEMPIO

1) $f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

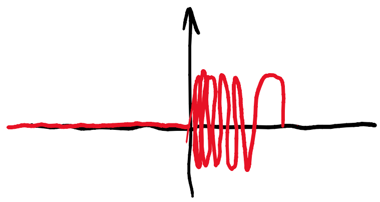


$\lim_{x \to 0^+} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} 2^{\frac{1}{x}} = 0$

ha una discontinuità di II specie in 0.

2) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

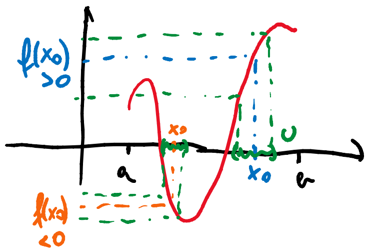


$\lim_{x \to 0^+} f(x) \nexists$

Teoremi sulle funzioni continue

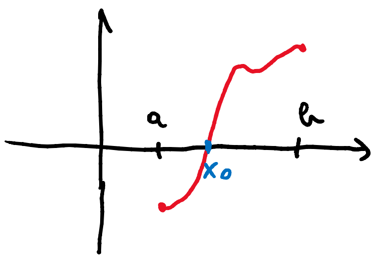
TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO (PER FUNZIONI CONTINUE)

Siano $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X$. Supponiamo che f sia continua in x_0 e $f(x_0) \neq 0$. Allora $\exists\, U \in I_{x_0}$ tale che $f(x)$ ha lo stesso segno di $f(x_0)$ $\forall\, x \in X \cap U$.

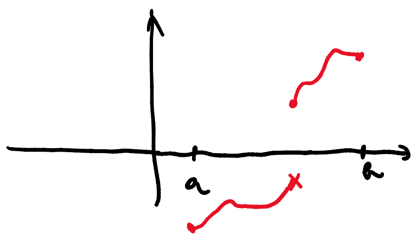


TEOREMA DEGLI ZERI

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in I. Siano $a, b \in I$ tali che $f(a)\, f(b) < 0$ e $a < b$. Allora $\exists\, x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.



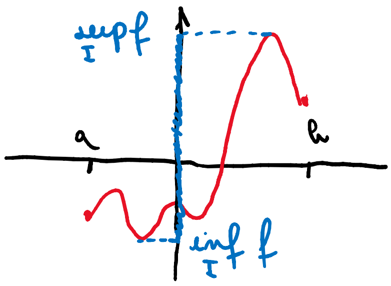
Il teorema non vale per funzioni discontinue.



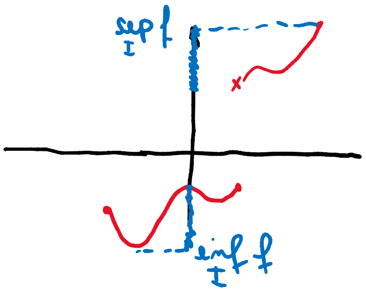
TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in I. Allora f assume in I tutti i valori strettamente compresi tra $\inf_I f$ e $\sup_I f$.

Cioè $(\inf_I f, \sup_I f) \subseteq f(I)$.



Il risultato non vale per funzioni discontinue.



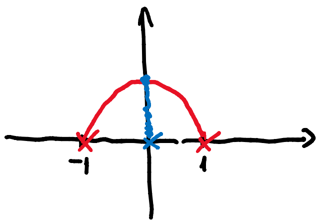
OSS Sotto le ipotesi del teorema dei valori intermedi $f(I)$ è un intervallo. Più precisamente:

$$\left(\inf_I f, \sup_I f\right) \subseteq f(I) \subseteq \left[\inf_I f, \sup_I f\right]$$

ESEMPIO

$I = (-1, 1)$, $f: (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 1-x^2$

$$f((-1,1)) = (0,1]$$



TEOREMA DI WEIERSTRASS

intervallo chiuso e limitato.

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e sia $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$. Allora $\exists \max_{[a,b]} f$ e $\min_{[a,b]} f$.

Tutte le ipotesi sono necessarie:

- Il teorema non vale se l'intervallo è aperto.

$f: (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow 1-x^2$ $\qquad \nexists \min_I f$.

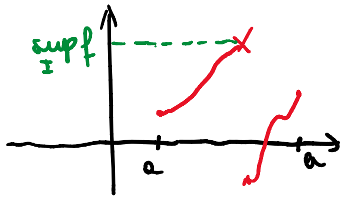
- Il teorema non vale l'intervallo non è limitato.

$$f: [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto e^{-x}$$

$$f([0,+\infty)) = (0,1]$$

$\nexists \min_I f$.

- Il teorema non vale se la funzione non è continua



$\nexists \max_{[a,b]} f$