

Limiti notevoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

più in generale $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad \forall a > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1$$

più in generale $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+1)}{x} = \frac{1}{\ln a} \quad \forall a > 0, a \neq 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Osservazione Ad eccezione dei limiti $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + \frac{1}{x})^x$ e $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

tutti gli altri limiti notevoli presenti nelle precedenti liste sono forme indeterminate del tipo $[\frac{0}{0}]$.

Sia $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + \frac{1}{x})^x$ e $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ sono forme indeterminate del tipo $[1^\infty]$

Altre forme indeterminate da compiere per funzioni del tipo $(f(x))^{g(x)}$ sono $[0^0]$ e $[\infty^0]$.

Queste tre forme indeterminate ($[1^\infty]$, $[0^0]$ e $[\infty^0]$) si possono ricondurre alle forme indeterminate $[0 \cdot \infty]$ mediante la scrittura

$$(f(x))^{g(x)} = e^{g(x) \ln(f(x))}$$

Notazione o - piccolo

Siano $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ e sia x_0 punto di accumulazione per X

Supponiamo che $g \neq 0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$

Scriviamo $f = o(g)$ per $x \rightarrow x_0$ e leggiamo

" f è un o-piccolo di g per x che tende a x_0 " se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

ATTENZIONE: $o(g)$ denota una classe di funzioni, pertanto le regole algebriche che dominano somma e prodotto tra questi termini in alcuni casi sono molto diverse delle regole algebriche del calcolo letterale.

Studieremo precisamente queste regole quando introdurremo i polinomi di Taylor.

Limiti notevoli e o-piccoli

Esempio:

$$\sin x = x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\tan x = x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\arcsin x = x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\arctan x = x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$e^x = 1 + x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\ln(1+x) = x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \sin x - x = o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \sin x = x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Dimostrazione di alcuni limiti notevoli

Non dimostriamo i limiti notevoli $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Tutti gli altri possono essere facilmente calcolati usando uno dei due precedenti

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2 (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \\ &= 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \quad \uparrow \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1$$

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$$

$x \rightarrow 0$ allora $y \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &\stackrel{\uparrow}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} \\ y &= -x \\ \text{e } x \rightarrow -\infty \text{ allora } y &\rightarrow +\infty \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1+1} \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) = e \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e \end{aligned} \right\} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_e(1+x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \log_e(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \log_e(1+x)^{\frac{1}{x}} \\ &= \log_e e = \frac{\ln e}{\ln e} = \frac{1}{\ln e}\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \underset{\uparrow}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log_e(y+1)} = \ln e$$

$$y = a^x - 1 \Leftrightarrow y+1 = e^x \Leftrightarrow x = \log_e(y+1)$$

so $x \rightarrow 0$ then $y \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{a \ln(1+x)} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{a \ln(1+x)} - 1}{a \ln(1+x)} \cdot a \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} = a$$

Definizione Siano $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ e x_0 punto di accumulazione di X

Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ diciamo che f è una funzione INFINITESIMA per $x \rightarrow x_0$

se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ oppure $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ diciamo che f è una funzione INFINITA per $x \rightarrow x_0$

Gerarchia degli infiniti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|\log_a x|^\beta}{x^\alpha} = 0$$

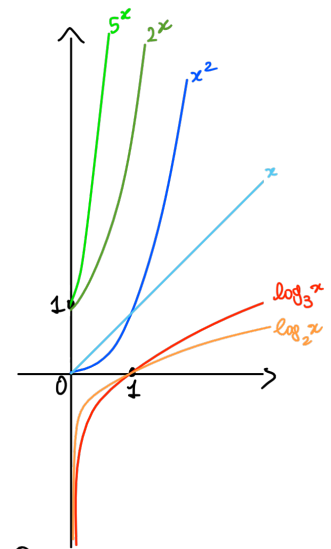
$$\forall a > 0, a \neq 1$$

$$\forall \alpha > 0, \forall \beta > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$$

$$\forall \alpha > 0$$

$$\forall a > 1$$



analogamente $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|\log_a x|^\beta}{b^x} = 0$

$$\forall a > 0, a \neq 1, \forall \beta > 0$$

$$\forall b > 1$$

Osservazione I limiti mancanti sono forme indeterminate del tipo $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Osservazione Utilizzando la gerarchia degli infiniti possiamo provare gli ultimi due limiti mancanti

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha |\log_a x|^\beta = 0$$

$$\forall \alpha > 0, \forall \beta > 0$$

$$\forall a > 0, a \neq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

NB: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha |\log_a x|^\beta$ è una forma indeterminata $[0 \cdot \infty]$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$ è una forma indeterminata $[\infty^0]$

ESERCIZI SUI LIMITI

- 1) • Determinare il dominio di $f(x) = \frac{x+1}{x^4-4x^2}$
- Trovare l'insieme delle soluzioni di $f(x) \geq 0$
 - Calcolare i limiti di f nei punti di frontiera del dominio

Svolgimento: C.E. $x^4-4x^2 \neq 0 \Rightarrow x^2(x^2-4) \neq 0$

$$\Rightarrow x^2 \neq 0 \wedge x^2-4 \neq 0$$

$$\Rightarrow x \neq 0 \wedge x \neq \pm 2$$

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, -2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$$

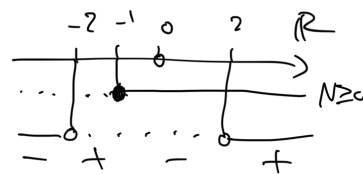
Risoluiamo $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x^2(x^2-4)} \geq 0$

$$N \geq 0 : x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$$

$$D > 0 : x^2(x^2-4) > 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x^2-4 > 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 0 \wedge (x < -2 \vee x > 2)$$

$$\Leftrightarrow x < -2 \vee x > 2$$



$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2 < x \leq -1 \vee x > 2$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x < -2 \vee (x \neq 0 \wedge -1 < x < 2)$$

Calcoliamo i limiti della funzione f nei punti di frontiera del dominio

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x^4-4x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+1}{x^4-4x^2} = -\infty$$

in particolare $\nexists \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+1}{x^4-4x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x^4-4x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x^4-4x^2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x^4-4x^2} = +\infty \quad \text{e quindi} \quad \nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^4-4x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0^+$$

- 2) • Determinare il dominio di $f(x) = x^3 e^{\frac{1}{x}}$
- Determinare l'insieme delle soluzioni di $f(x) \geq 0$
 - Calcolare i limiti di f nei punti di frontiera del dominio

Svolgimento: c.t. $x \neq 0$ $\text{dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Risoluiamo $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^3 e^{\frac{1}{x}} \geq 0 \Rightarrow x^3 \geq 0 \Rightarrow x > 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^{\frac{1}{x}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 e^{\frac{1}{x}} = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 e^{\frac{1}{x}} \stackrel{[0, \infty]}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t}\right)^3 e^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^3} = +\infty$$

$$t = \frac{1}{x}$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{1}{t}$$

se $x \rightarrow 0^+$ allora $t \rightarrow +\infty$

↑
gerarchia
degli infiniti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \log x \cdot \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{weil: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 + 3x^4 + 15) \stackrel{[+\infty - \infty]}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{15}{x^5}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+2)^3}{7x^3 + x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x^4 + 7x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{6}{x} + \frac{12}{x^2} + \frac{8}{x^3}\right)}{x^4 \left(1 + \frac{7}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8 - 9x - 2x^2}{3x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2}{3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{2}{3}x = +\infty$$

$$7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{5x^4 - 1000} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 1}{5x^4 - 1000} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{5x^4} = \frac{1}{5}$$

$$8) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x^5} = +\infty \quad \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \quad \text{gerarchia doppi' infiniti}$$

$$9) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^8}{(\ln x)^9} = +\infty \quad \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \quad \text{gerarchia doppi' infiniti}$$

$$10) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{3^x} = 0^+ \quad \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \quad \text{gerarchia doppi' infiniti}$$

$$11) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + \sqrt[3]{1+x^6} + \sqrt{x+1}}{7x^8 + \ln x + \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{11}{10}\right)^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + x^2 \sqrt[3]{\frac{1}{x^6} + 1} + \sqrt{x} \sqrt{\frac{1}{x} + 1}}{7x^8 + \ln x + \left(\frac{11}{10}\right)^x}$$

$$\boxed{\sqrt[3]{x^6} = (x^6)^{\frac{1}{3}} = x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + x^2 + \sqrt{x}}{7x^8 + \ln x + \left(\frac{11}{10}\right)^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{\left(\frac{11}{10}\right)^x} = 0$$

gerarchia
doppi' infiniti

$$12) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x + \operatorname{arctg} x + e^{-x} + 2^x}{3 \ln |x| + (\ln |x|)^4}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\cos(-t) + \operatorname{arctg}(-t) + e^t + 2^{-t}}{3 \ln |-t| + (\ln |-t|)^4} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\cos t - \operatorname{arctg} t + e^t + 2^{-t}}{3 \ln t + (\ln t)^4}$$

$$\boxed{t = -x \Leftrightarrow x = -t}$$

e $x \rightarrow -\infty$ allora $t \rightarrow +\infty$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{(\ln t)^4} = +\infty \quad \text{gerarchia doppi' infiniti}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 \ln x + (\ln x)^3 + \frac{1}{2} (\ln x)^4}{x + \ln(\ln x)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{5t + t^3 + \frac{1}{2}t^4}{e^t + \ln t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2}t^4}{e^t} = 0$$

$t = \ln x \Leftrightarrow x = e^t$
 se $x \rightarrow +\infty$ allora $t \rightarrow +\infty$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x^2 + x) \ln x \stackrel{[0 \cdot \infty]}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x^2 \ln x + x \ln x) = 0$$

↑
 limite notevole
 conseguenza della
 gerarchia degli
 infiniti

$$15) \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} \left(\frac{x^2}{x^2 - 1} \right) = \frac{\pi}{4}$$

limite della
 funzione composta

dove abbiamo usato

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \operatorname{arctg} t = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow -\infty} \log \left(\frac{2 - x^2}{x^3 - 1} \right) = -\infty$$

limite della funzione
 composta

dove abbiamo utilizzato

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - x^2}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} = 0^+$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \log t = -\infty$$

$$17) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{x^5}{3x+1}} = 0^+$$

Per il teorema sul limite della funzione composta,
 impiegando i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{3x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{3} = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^t = 0^+$$

$$18) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2 + \sin(\ln x)}{\sqrt[3]{8+x^3} + \sqrt[4]{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

$$19) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x}{(x-1)^2} = +\infty$$

da cui abbiamo usato l'algebra dei limiti in combinazione con

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sin x = \sin 1 > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0^+$$

$$20) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\operatorname{arctg}(\sqrt[3]{x})} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot 3x \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{\operatorname{arctg}(\sqrt[3]{x})}$$

usando i limiti notevoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} 3x^{\frac{2}{3}} = 0$$

$$21) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x)) \cdot \ln(1+x^3)}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \cdot (\sqrt{1+7x^2} - 1)} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}$$

usiamo i limiti notevoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}} - 1}{x} = \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos(4x)}{(4x)^2} \cdot (4x)^2 \cdot \frac{\ln(1+x^8)}{x^3} \cdot x^3}{\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{1+7x^2}-1}{7x^2} \cdot 7x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{1 \cdot \frac{1}{2}} \cdot \frac{4x^2 \cdot x^3}{\frac{x}{2} \cdot 7x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8}{7} x^2 = 0$$

$$22) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(e^{x^2}-1)}{(e^{2x}-1) \ln(\cos x)} \stackrel{[0/0]}{=}$$

deprimmo utilizzare i seguenti limiti notevoli:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(e^{x^2}-1)}{e^{2x}-1} \cdot \frac{e^{x^2}-1}{x^2} \cdot x^2 \cdot \frac{2x}{e^{2x}-1} \cdot \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{\ln(1+\cos x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} \cdot \frac{\cos x - 1}{\ln(1+\cos x-1)} \cdot \frac{1}{-1+\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x}{2} \frac{1}{1-\cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2x} \frac{x^2}{1-\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(e^{x^2}-1)}{(e^{2x}-1) \ln(\cos x)}, \text{ ma } \begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\arcsin(e^{x^2}-1)}{(e^{2x}-1) \ln(\cos x)} &= +\infty \\ \exists \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arcsin(e^{x^2}-1)}{(e^{2x}-1) \ln(\cos x)} &= -\infty \end{aligned}$$

$$23) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) \stackrel{[0 \cdot \infty]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1$$

$$24) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Proposizione (infinitesimo vs limitate)

Siano $f, g: X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e x_0 punto di accumulazione di X .

Supponiamo che:

- f è infinitesimo per $x \rightarrow x_0$ (cioè, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$)
- g è limitata definitivamente per $x \rightarrow x_0$ (cioè, $\exists I$ intorno di x_0 $\exists M \geq 0$ tali che $|g(x)| \leq M \quad \forall x \in I, x \neq x_0$)

Allora $f \cdot g$ è infinitesimo per $x \rightarrow x_0$, ovvero $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$

$f(x) = 1 - \cos x$ è infinitesimo per $x \rightarrow 0$

$g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ è limitata su $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$25) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt[4]{4x^8 + 10}} \stackrel{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{5}{x^2}\right)}}{\sqrt[4]{4x^8 \left(1 + \frac{10}{4x^8}\right)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \cdot \sqrt{1 + \frac{5}{x^2}}}{\sqrt{2} x^2 \sqrt[4]{1 + \frac{5}{2x^8}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \stackrel{[0^0]}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$$

$\uparrow$
 $\ln a^b = b \ln a$

$$27) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} \stackrel{[\infty^0]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x}$$

↑
limite notevole
visto a inizio
lezione

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1$$

↑
per il teorema
di de l'Hôpital $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$$28) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(3x)} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2(1+\frac{1}{x^2}))}{\ln(3x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^2 + \ln(1+\frac{1}{x^2})}{\ln(3x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{\ln(3x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{\ln x + \ln 3} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{2y}{y+3} = 2$$

↑
 $y = \ln x$ se $x \rightarrow +\infty$ allora $y \rightarrow +\infty$

$$29) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+3x}{x^2+1} \right)^{2x} \stackrel{[1^\infty]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - 1 + \frac{x^2+3x}{x^2+1} \right)^{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{(-1)(x^2+1) + x^2+3x}{x^2+1} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3x-1}{x^2+1} \right)^{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2+1}{3x-1}} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2+1}{3x-1}} \right)^{2x \cdot \frac{x^2+1}{3x-1} \cdot \frac{3x-1}{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x^2+1}{3x-1}} \right)^{\frac{x^2+1}{3x-1}} \right]^{2x \cdot \frac{3x-1}{x^2+1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x^2+1}{3x-1}} \right)^{\frac{x^2+1}{3x-1}} \right]^{\frac{6x^2-2x}{x^2+1}} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} e^6$$

↑
per il teorema

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{3x-1} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2-2x}{x^2+1} = 6$$

Sudg-mento alternativo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 3x}{x^2 + 1} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x \cdot \ln \left(\frac{x^2 + 3x}{x^2 + 1} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x \cdot \ln \left(1 + \frac{x^2 + 3x}{x^2 + 1} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x \cdot \ln \left(1 + \frac{3x-1}{x^2+1} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x \cdot \frac{3x-1}{x^2+1} \cdot \frac{\ln \left(1 + \frac{3x-1}{x^2+1} \right)}{\frac{3x-1}{x^2+1}}} = e^6$$

$$30) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+3x}{1+2x} \right)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{2x} \ln \left(\frac{1+3x}{1+2x} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{2x} \ln \left(1 + \frac{1+3x}{1+2x} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{2x} \ln \left(1 + \frac{x}{1+2x} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+2x} \cdot \frac{\ln \left(1 + \frac{x}{1+2x} \right)}{\frac{x}{1+2x}}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$