LEZIONE 14

mercoledì 2 novembre 2022 08:49

Nella scorsa lezione abbiamo introdotto:

- Intorni di $x_0 \in \mathbb{R}^*$ (I_{x_0})
- Punti di accumulazione di un insieme X $(D(X))$
- Definizione di limite:
  Data $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ e dati $x_0 \in D(X)$, $l \in \mathbb{R}^*$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall V \in I_l \ \exists U \in I_{x_0} \text{ t.c. } f(x) \in V \ \forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$$

$(f(x) \in V$ definitivamente per $x \to x_0)$

- limiti di funzioni elementari.

TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE

Sia $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ e siano $x_0 \in D(X)$ e $l_1, l_2 \in \mathbb{R}^*$. Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$ allora $l_1 = l_2$.

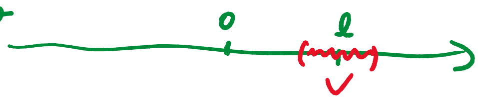
TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

Sia $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ e siano $x_0 \in D(X)$, $l \in \mathbb{R}^*$. Se $l \neq 0$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, allora $\exists U \in I_{x_0}$ tale che $\forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$ si ha che $f(x)$ ha lo stesso segno di l.

($l \neq 0$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ allora $f(x)$ ha lo stesso segno di l definitivamente per $x \to x_0$ e $x \in X$)

DIM

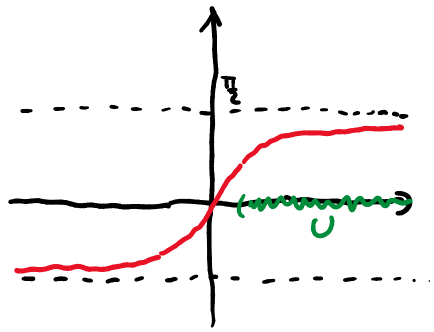
Se $l \neq 0$ allora $\exists V$ intorno di l tale che $0 \notin V$.
Allora tutti i punti di V hanno lo stesso segno di l.



Siccome $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, dato V $\exists\, U \in I_{x_0}$ tale che $f(x) \in V \quad \forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$.
Allora $\forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$: $f(x)$ ha lo stesso segno di ℓ. $\square$

ESEMPI

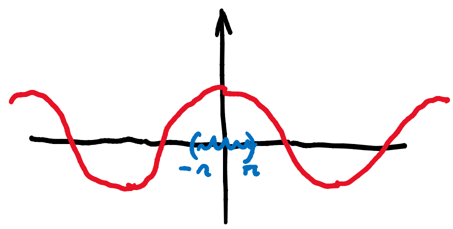
- $f(x) = \arctan x$, $x_0 = +\infty$.



$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} > 0$

quindi $\exists$ un intorno di $+\infty$ in cui $f(x) > 0$.

- $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$



$\lim_{x\to 0} \cos x = 1 > 0$

$\exists\, r > 0$ tale che $f(x) > 0$ $\forall x \in (-r, r)$.

CONSEGUENZA

Sia $f: X \to \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}$ e siano $x_0 \in D(X)$ e $\ell \in \mathbb{R}^*$ tali che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$.
Se $\exists\, U$ intorno di x_0 tale che $f(x) \geq 0$ $\forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$, allora $\ell \geq 0$.

VERSIONE GENERALE

Siano $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D(X)$, $\ell \in \mathbb{R}^*$ tali che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$. Sia $a \in \mathbb{R}$. Allora:

1) Se $\ell > a$, $f(x) > a$ definitivamente per $x \to x_0$.
2) Se $\ell < a$, $f(x) < a$ definitivamente per $x \to x_0$.

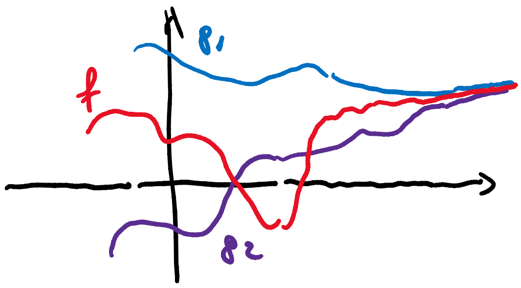
3) Se $f(x) \geq a$ definitivamente per $x \to x_0$, allora $l \geq a$
4) Se $f(x) \leq a$ definitivamente per $x \to x_0$, allora $l \leq a$

TEOREMA DEL CONFRONTO (o TEOREMA DEI CARABINIERI)

Siano $f, g_1, g_2 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}$. Siano $x_0 \in D(X)$, $l \in \mathbb{R}^*$. Assumiamo che:

1) $g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x)$ definitivamente per $x \to x_0$.
2) $\lim_{x \to x_0} g_1(x) = l$ e $\lim_{x \to x_0} g_2(x) = l$.

Allora si ha $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.



DIM

Sia $V \in I_l$. Dato che $\lim_{x \to x_0} g_1(x) = l$ e $\lim_{x \to x_0} g_2(x) = l$ allora

$\exists\, U_1, U_2 \in I_{x_0}$ tali che $g_1(x) \in V \quad \forall x \in U_1 \cap X \setminus \{x_0\}$ e $g_2(x) \in V \quad \forall x \in U_2 \cap X \setminus \{x_0\}$.

Sia $\tilde{U} = U_1 \cap U_2$. Allora $\tilde{U} \in I_{x_0}$ e $\forall x \in \tilde{U} \cap X \setminus \{x_0\}$ si ha $g_1(x) \in V$ e $g_2(x) \in V$. In particolare $[g_1(x), g_2(x)] \subseteq V$.

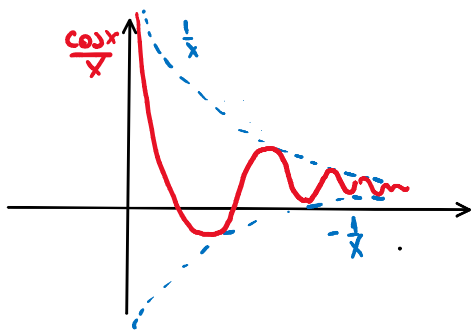
Inoltre $\exists\, U_3 \in I_{x_0}$ tale che $f(x) \in [g_1(x), g_2(x)]$ $\forall x \in U_3 \cap X \setminus \{x_0\}$.

Sia $U = \tilde{U} \cap U_3$. Allora $U_3 \in I_{x_0}$ e $\forall x \in U_3 \cap X \setminus \{x_0\}$ si ha $f(x) \in [g_1(x), g_2(x)] \subseteq V \Rightarrow f(x) \in V$. $\square$

ESEMPIO

$f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$ e $x_0 = +\infty$.

Per $x > 0$: si ha che $-\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{\cos x}{x} \leq \dfrac{1}{x}$



Poiché $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0$

possiamo concludere per il teorema del confronto che

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$.

OSS

Nel teorema del confronto:

- Se $\ell = +\infty$, nell'ipotesi 1) basta $f(x) \geq g_1(x)$ (non serve g_2)
- Se $\ell = -\infty$, in 1) basta $f(x) \leq g_2(x)$ (non serve g_1).

ESEMPIO

$\lim_{x \to +\infty} x + \cos x$?

$x + \cos x \geq x - 1$

e $\lim_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$ quindi per il teorema del confronto (e l'osservazione) si ha $\lim_{x \to +\infty} x + \cos x = +\infty$.

Operazioni tra limiti

TEOREMA

Siano $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D(X)$, $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ (per ora escludiamo $+\infty$ e $-\infty$) tali che $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = \ell_1$ e $\lim_{x \to x_0} f_2(x) = \ell_2$. Allora:

1) $\lim_{x \to x_0} f_1(x) + f_2(x) = \ell_1 + \ell_2$

2) Se $c \in \mathbb{R}$ allora $\lim_{x \to x_0} c f_1(x) = c\,\ell_1$

3) $\lim_{x \to x_0} f_1(x) - f_2(x) = \ell_1 - \ell_2$

4) $\lim_{x \to x_0} f_1(x) f_2(x) = \ell_1 \ell_2$

5) Se $\ell_2 \neq 0$ allora $\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$

ESEMPI

- $\lim_{x \to 0} 2e^x + x = 2 \lim_{x \to 0} e^x + \lim_{x \to 0} x = 2 \cdot 1 + 0 = 2$
- $\lim_{x \to \pi} x^2 (\cos x)^3 = \pi^2 \cdot (-1)^3 = -\pi^2$
- $\lim_{x \to 2} \frac{3^x}{x-3} = \frac{3^2}{2-3} = \frac{9}{-1} = -9$

OSS: In molti casi (ma non in tutti i casi) le regole precedenti funzionano anche se $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}^*$.

Più precisamente:

Per la somma:

- $\ell_1 = +\infty$, $\ell_2 \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\ell_1 + \ell_2 = +\infty$
- $\ell_1 \in \mathbb{R}$, $\ell_2 = +\infty$ $\Rightarrow$ $\ell_1 + \ell_2 = +\infty$
- $\ell_1 = -\infty$ e $\ell_2 \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\ell_1 + \ell_2 = -\infty$
- $\ell_1 \in \mathbb{R}$ e $\ell_2 = -\infty$ $\Rightarrow$ $\ell_1 + \ell_2 = -\infty$
- Se $\ell_1 = \ell_2 = +\infty$ allora $\ell_1 + \ell_2 = +\infty$
- Se $\ell_1 = \ell_2 = -\infty$ allora $\ell_1 + \ell_2 = -\infty$

Nota: Non c'è una regola generale per $-\infty + \infty$ o $+\infty - \infty$. Si dice in questi casi nel limite di $f_1 + f_2$ c'è una **FORMA INDETERMINATA**

Per il prodotto per una costante $c \in \mathbb{R}$:

- Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ e $c \in \mathbb{R}$ allora $\lim_{x \to +\infty} c f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0 \\ 0 & \text{se } c = 0 \end{cases}$

- Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ e $c \in \mathbb{R}$, allora $\lim_{x \to -\infty} c\, f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } c>0 \\ +\infty & \text{se } c<0 \\ 0 & \text{se } c=0. \end{cases}$

Per la differenza: le regole si ricavano da quelle per la somma

Per il prodotto:

- Se $l_1 = +\infty$ e $l_2 \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$ allora $\lim_{x \to x_0} f_1(x)\, f_2(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } l_2 > 0 \\ -\infty & \text{se } l_2 < 0 \end{cases}$
- Se $l_1 = -\infty$ e $l_2 \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$ allora $\lim_{x \to x_0} f_1(x)\, f_2(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } l_2 > 0 \\ +\infty & \text{se } l_2 < 0 \end{cases}$

Nota: Non c'è una regola per $+\infty \cdot 0$ o $-\infty \cdot 0$. Anche questi casi sono forme indeterminate.

Per il quoziente:

- Se $l_1 = +\infty$ e $l_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } l_2 > 0 \\ -\infty & \text{se } l_2 < 0 \end{cases}$$

- Se $l_1 = -\infty$ e $l_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \begin{cases} -\infty & \text{se } l_2 > 0 \\ +\infty & \text{se } l_2 < 0. \end{cases}$$

- Se $l_1 \in \mathbb{R}$ e $l_2 \in \{+\infty, -\infty\}$ allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0$$

Nota: Invece, sono forme indeterminate:

$$\frac{+\infty}{+\infty}, \quad \frac{-\infty}{+\infty}, \quad \frac{+\infty}{-\infty}, \quad \frac{-\infty}{-\infty}, \quad \frac{0}{0}$$

E se $l_1 \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$ e $l_2 = 0$?

In questo caso bisogna guardare il segno della funzione. Se $f(x)$ ha un segno definitivamente allora il risultato è ∞ con lo stesso segno di f.

ESEMPIO

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

In altri termini:

- se $l_1 \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$ e $l_2 = 0^+$ allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } l_1 > 0 \\ -\infty & \text{se } l_1 < 0 \end{cases}$$

- Se $l_1 \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$ e $l_2 = 0^-$ allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \begin{cases} -\infty & \text{se } l_1 > 0 \\ +\infty & \text{se } l_1 < 0 \end{cases}$$

In molti casi per applicare queste regole occorre calcolare separatamente $\lim_{x \to x_0^+}$ e $\lim_{x \to x_0^-}$

Ad esempio:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \nexists \quad \text{ma} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty .$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty .$$

ESEMPI

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} - 3x = 0 - \infty = -\infty$

- $\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{x}{\tan x} = \frac{\frac{\pi}{2}}{-\infty} = 0$

- $\lim_{x \to +\infty} x e^x = +\infty \cdot +\infty = +\infty$

- $\lim_{x \to 2} \frac{1-x}{(x-2)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$.

- $\lim_{x \to 2} \frac{1-x}{x-2} \nexists$ perché:

$\lim_{x \to 2^+} \frac{1-x}{x-2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

e $\lim_{x \to 2^-} \frac{1-x}{x-2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

(limite destro e sinistro sono diversi quindi il limite non esiste)

Esempi con forme indeterminate:

- $\lim_{x \to +\infty} x - x^2$ $\quad (+\infty - (+\infty) = +\infty - \infty \quad f.i.)$

Si può risolvere la forma indeterminata raccogliendo il termine più grande (in questo caso, x^2).

$$\lim_{x \to +\infty} x - x^2 = \lim_{x \to +\infty} x^2 \left(\frac{1}{x} - 1\right) = +\infty\,(0 - 1)$$
$$= +\infty \cdot (-1) = -\infty$$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{2x^2+x-1}$ $\quad \begin{matrix} x^2+1 \to +\infty \\ 2x^2+x-1 \to +\infty \end{matrix} \quad \frac{+\infty}{+\infty} \quad f.i.$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{2x^2+x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{1+0}{2+0-0} = \frac{1}{2}$$

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^3}{2x^2+x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(\frac{1}{x^3}-1\right)}{\cancel{x^2}\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\frac{1}{x^3}-1\right)}{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} = \frac{+\infty\cdot(-1)}{2} = -\infty.$

Regola generale Se $p(x)$ e $q(x)$ sono due polinomi, allora per calcolare $\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{q(x)}$ o $\lim_{x\to-\infty} \frac{p(x)}{q(x)}$ basta raccogliere il termine di grado maggiore sia al numeratore che al denominatore.

Nota:

- Se $\deg p(x) = \deg q(x)$ allora il limite sarà uguale al rapporto tra i coefficienti di grado più alto
- Se $\deg p(x) > \deg q(x)$ allora il limite sarà $+\infty$ o $-\infty$ a seconda dei segni di p e q.
- Se $\deg q(x) > \deg p(x)$ il limite sarà uguale a 0

- $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$ $\quad \frac{1-1}{1+2-3} = \frac{0}{0}$ f. i.

$= \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+3)}$

$= \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$x^2+2x-3=0$

$\Leftrightarrow x_{1,2} = -1 \pm 2 = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$

quindi x^2+2x-3

$= (x-1)(x+3).$

Regola generale: Se $x_0 \in \mathbb{R}$ e p, q sono polinomi tali che $p(x_0)=0$ e $q(x_0)=0$ allora il limite $\lim_{x\to x_0} \frac{p(x)}{q(x)}$ si può calcolare scomponendo $p(x)$ e $q(x)$

e semplificando i fattori comuni:

- $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{(x^2+2x-3)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{(x-1)^{\cancel{2}}(x+3)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{(x-1)(x+3)^2}$$

il limite $\nexists$ perché

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{2}{0^+ \, 16} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x+1}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{2}{0^- \cdot 16} = -\infty$$

TEOREMA (LIMITI DI FUNZIONI COMPOSTE)

Siano $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow \mathbb{R}$ con $X, Y \subseteq \mathbb{R}$.
Siano $x_0 \in D(X)$, $y_0 \in D(Y)$ e $\ell \in \mathbb{R}^*$. Se

1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$

2) $\lim_{y\to y_0} g(y) = \ell$

3) $f(x) \neq y_0$ definitivamente per $x \to x_0$.

Allora $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \ell$

Nota: L'ipotesi 3) si può eliminare se $y_0 \in Y$ e $g(y_0) = \ell$ oppure se $y_0 \in \{+\infty, -\infty\}$.

ESEMPI

- $$\lim_{x\to +\infty} 2^{\frac{1}{x}} \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to 0} 2^y = 2^0 = 1.$$

- $$\lim_{x\to 0^-} 2^{\frac{1}{x}} \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to -\infty} 2^y = 2^{-\infty} = 0.$$

- $$\lim_{x\to 0^+} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to +\infty} 2^y = +\infty.$$

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} \overset{y=x^2+3}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$

- $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$ $\frac{-\infty}{+\infty}$ f. i.

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2(1+\frac{3}{x^2})}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{(-x)\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} = -1.$$

Limiti di potenze $\left(f(x)^{g(x)} \right)$

- Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in (0,+\infty)$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = n \in \mathbb{R}$ allora $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \ell^n$.
- Per gli altri casi si usa la seguente uguaglianza
$$f(x)^{g(x)} = e^{\log\left(f(x)^{g(x)}\right)} = e^{g(x)\log f(x)}$$
si fa il limite all'esponente con le regole per il prodotto (o per i quozienti).

ESEMPIO:

- $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{1+\log x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\log\left(x^{\frac{1}{1+\log x}}\right)}$
$$= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\log x}{1+\log x}}$$

Consideriamo solo l'esponente:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{1+\log x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{\log x}}{\cancel{\log x}\left(\frac{1}{\log x}+1\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{\log x}+1}$$

$$= \frac{1}{0+1} = 1$$

<u>Conclusione</u>:

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{\log x+1}} = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{\log x}{1+\log x}} = e^{1} = e$$