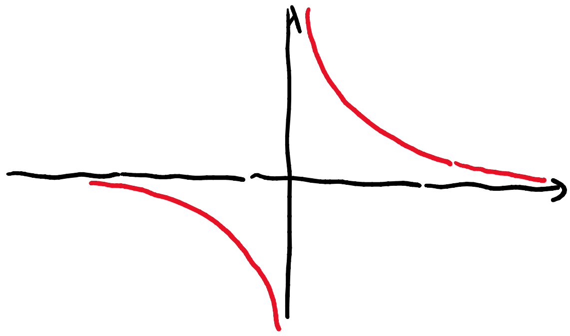
LEZIONE 13

giovedì 27 ottobre 2022 09:04

LIMITI DI FUNZIONI (cap 4 del libro)

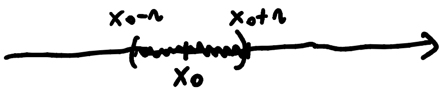
- $f(x) = \frac{1}{x}$

  $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



- Se x è molto grande $f(x)$ è vicino a 0
- Se x è "vicino a $-\infty$" allora $f(x)$ è vicino a 0.
- Se x è vicino a 0 e $x > 0$ allora $f(x)$ è "vicino" a $+\infty$

Def: Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, ogni intervallo del tipo $(x_0 - r, x_0 + r)$ con $r \in (0, +\infty)$ si dice un INTORNO (SFERICO) DI x_0.



OSS

$$(x_0 - r, x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$$

Def: Dato $M \in \mathbb{R}$, definiamo INTORNO di $+\infty$ un qualsiasi insieme del tipo $(M, +\infty)$.

Definiamo intorno di $-\infty$ un qualsiasi insieme tipo $(-\infty, M)$

Notazione: Indichiamo $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ ($\mathbb{R}$ AMPLIATO O AMPLIAMENTO DI $\mathbb{R}$)

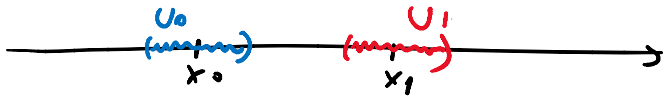
PROPRIETÀ DEGLI INTORNI

Sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$ allora:

1) Ogni intorno di x_0 contiene infiniti elementi.
2) Se U e V sono intorni di x_0 allora $U \cap V$ è un intorno di x_0.

3) $\forall\, U$ intorno di x_0, $\exists\, \hat{U}$ intorno di x_0 tale che $\tilde{U} \subsetneq U$.

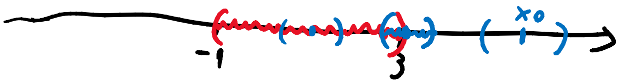
4) (Proprietà di separazione) Se $x_1 \in \mathbb{R}^*$ e $x_1 \neq x_0$, allora $\exists\, U_1$ intorno di x_1 e U_0 intorno di x_0 tali che $U_1 \cap U_0 = \emptyset$



Def Sia X un insieme e sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Si dice che x_0 è un PUNTO DI ACCUMULAZIONE per X se ogni intorno di x_0 contiene infiniti elementi di X.

ESEMPI

1) $X = (-1, 3)$

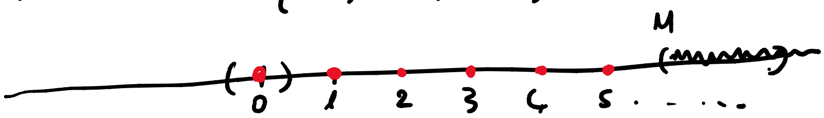


L'insieme dei punti di accumulazione è $[-1, 3]$

Notazioni:

- L'insieme dei punti di accumulazione di X si indica con $D(X)$.
- Dato $x_0 \in \mathbb{R}^*$ indichiamo con I_{x_0} l'insieme di tutti gli intorni di x_0.

2) $X = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\ldots\}$



$$D(X) = \{+\infty\}$$

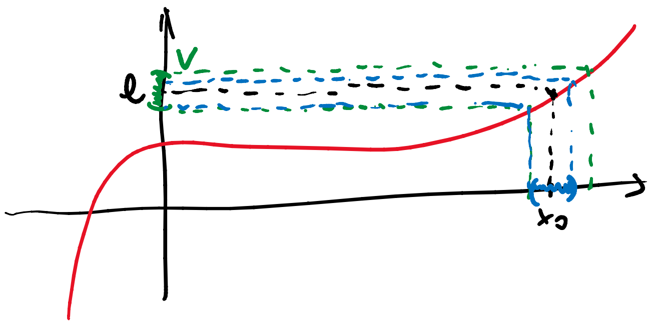
3) $X = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \right\}$

$D(X) = \{0\}$

Def Sia $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}$. Siano $x_0 \in D(X)$ e $\ell \in \mathbb{R}^*$. Si dice che il LIMITE PER $x \to x_0$ DI $f(x)$ È ℓ se:

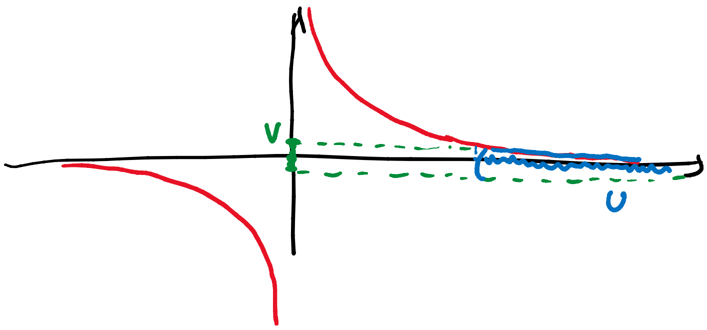
$\forall V \in I_\ell \quad \exists U \in I_{x_0}$ tale che $f(x) \in V \ \forall x \in X \cap U \setminus \{x_0\}$

(si scrive $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ o $f(x) \to \ell$ per $x \to x_0$)



"Mi posso avvicinare quanto voglio ad ℓ purché si prendo x abbastanza vicino a x_0."

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$



Definizioni equivalenti:

Sia $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione con $X \subseteq \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in D(X)$ e $\ell \in \mathbb{R}^*$. Allora:

1) Se $x_0, \ell \in \mathbb{R}$ allora:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che $f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon) \ \forall x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ $\forall x \in X$ con $0 < |x - x_0| < \delta$.

2) Se $x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell = +\infty$, allora:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 \text{ tale } f(x) \in (M, +\infty) \ \forall x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$$

$$\iff \forall M \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 \text{ tale che } f(x) > M \ \forall x \in X \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

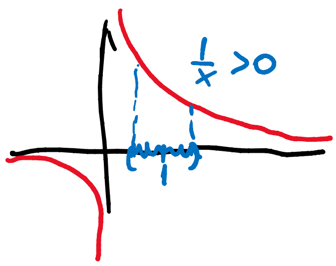
Altra definizione equivalente:

Def. Sia $P(x)$ una proprietà che dipende da un numero reale x. Si dice che $P(x)$ è vera DEFINITIVAMENTE per $x \to x_0$ se $\exists\, U \in I_{x_0}$ tale che $P(x)$ è vera $\forall x \in U \setminus \{x_0\}$.

ESEMPI

- $f(x) = \frac{1}{x}$

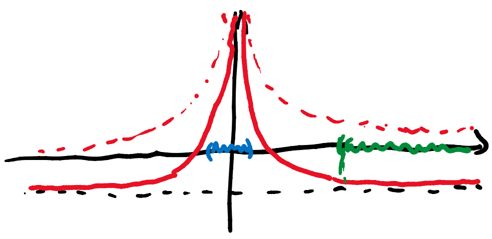
  $f(x) > 0$ definitivamente per $x \to 1$



- $f(x) = \frac{1}{x^2} - 1$

  $f(x) > 0$ definitivamente per $x \to 0$

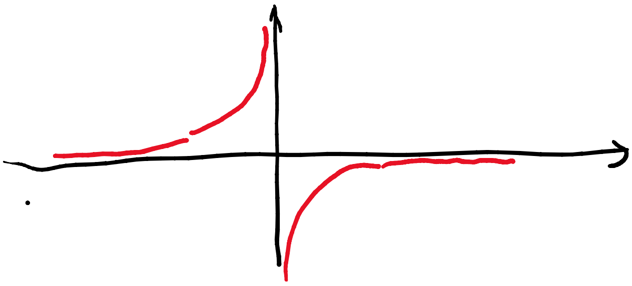
  $f(x) < 0$ definitivamente per $x \to +\infty$



OSS Sia $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in D(X)$, $\ell \in \mathbb{R}^*$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall V \text{ intorno di } x_0 \text{ si ha } f(x) \in V \text{ definitivamente per } x \to x_0,\ x \in X.$$

$f(x) = \frac{1}{x}$



Attenzione: $\nexists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$.

Occorre distinguere il comportamento per $x > 0$ da quello per $x < 0$.

Def: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un insieme. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Si dice che x_0 è UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE DA DESTRA per X se ogni intorno di x_0 contiene infiniti elementi di $X \cap (x_0, +\infty)$.

In modo simile si definiscono i punti di accumulazione da sinistra: si dice che x_0 è un PUNTO DI ACCUMULAZIONE DA SINISTRA per X se ogni intorno di x_0 contiene infiniti elementi di $X \cap (-\infty, x_0)$.

Notazione: $D^+(X)$ insieme dei punti di acc. da destra per X
$D^-(X)$ insieme dei punti di acc. da sinistra per X.

ESEMPI

$X = (0, 1)$.

$D^+(X) = [0, 1)$

$D^-(X) = (0, 1]$

Def: Sia $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$. Siano $x_0 \in D^+(X)$ e $\ell \in \mathbb{R}^*$.
Si dice che ℓ È IL LIMITE DESTRO di $f(x)$ per $x \to x_0$ se:
$\forall\, V$ intorno di ℓ $\exists\, U$ intorno di x_0 tale che
$f(x) \in V \quad \forall\, x \in X \cap U \cap (x_0, +\infty)$
(si scrive $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ oppure $f(x) \to \ell$ per $x \to x_0^+$)

In modo simile:

Sia $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in D^-(X)$ e $\ell \in \mathbb{R}^*$.

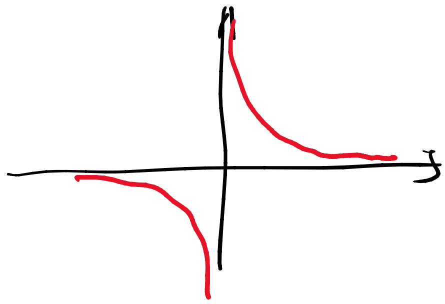
Si dice che ℓ È IL LIMITE SINISTRO di $f(x)$ per $x \to x_0$ se $\forall V$ intorno di ℓ $\exists U$ intorno di x_0 tale che $f(x) \in V$ $\forall x \in X \cap U \cap (-\infty, x_0)$.

ESEMPIO

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Possiamo dire che $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

e $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$



OSS

Se $x_0 \in D^+(X) \cap D^-(X)$ allora:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$$

Cioè il limite di $f(x)$ è ℓ se e solo se sia il limite destro che il limite sinistro sono uguali. In particolare se limite destro e limite sinistro sono diversi allora $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$.

Def: Sia $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$. Siano $x_0 \in D(X)$ e $\ell \in \mathbb{R}^*$.

Si dice che ℓ È IL LIMITE PER ECCESSO di $f(x)$ per $x \to x_0$ se $\forall V \in I_\ell$ $\exists U \in I_{x_0}$ tale che $f(x) \in V \cap (\ell, +\infty)$ $\forall x \in X \cap U \setminus \{x_0\}$.

(Si scrive che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell^+$ o $f(x) \to \ell^+$ per $x \to x_0$)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+ \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$$

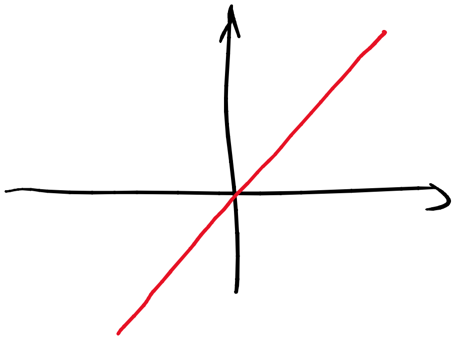
Limiti di funzioni elementari

- $f(x) = x$

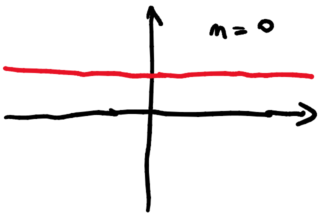
$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

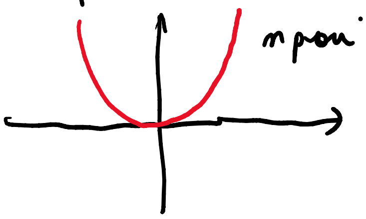
$$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

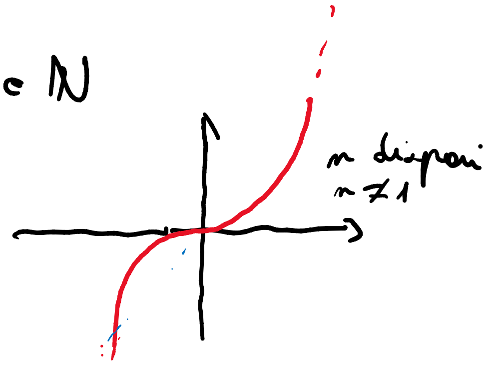
$$\lim_{x \to x_0} x = x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$



- **Potenze naturali:** $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$





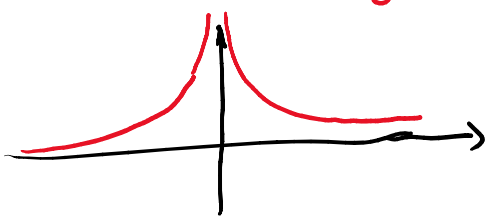


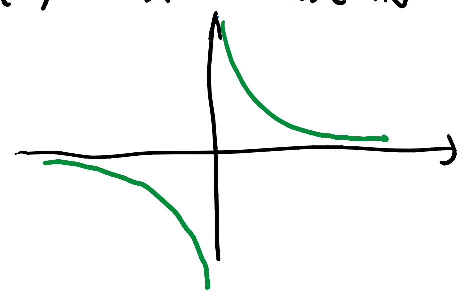
$$\lim_{x \to +\infty} x^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ +\infty & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ +\infty & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\infty & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

Potenze intere negative: $f(x) = x^{-n}$ $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$





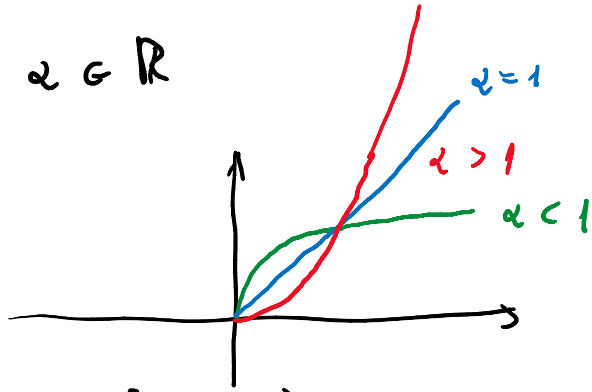
- $\lim_{x \to +\infty} x^{-n} = 0 \quad (0^+)$
- $\lim_{x \to -\infty} x^{-n} = 0 \quad$ (0^+ se n è pari , 0^- se n è dispari)
- $\lim_{x \to 0} x^{-n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ è pari} \\ \nexists & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

Nel caso n dispari si può dire che $\lim_{x \to 0} x^{-n} \nexists$ ma $\lim_{x \to 0^+} x^{-n} = +\infty$ e $\lim_{x \to 0^-} x^{-n} = -\infty$

- $\lim_{x \to x_0} x^{-n} = x_0^{-n} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

- Potenze reali

$f(x) = x^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

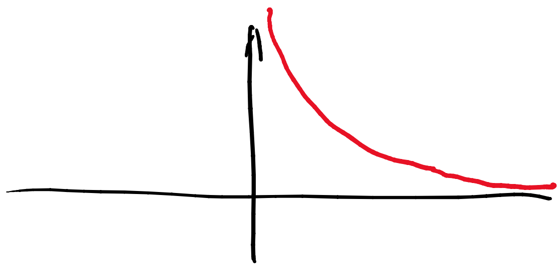


- se $\alpha > 0$

$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$

$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = 0$

$\lim_{x \to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha \quad \forall x_0 \in [0, +\infty)$



- se $\alpha < 0$

$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = +\infty$

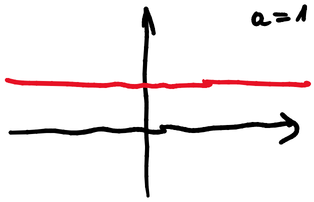
$\lim_{x \to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha \quad \forall x_0 \in (0, +\infty)$

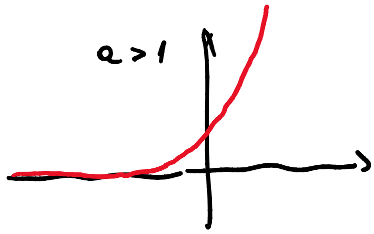
ESEMPI

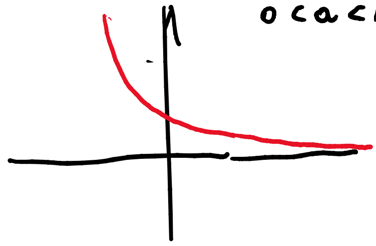
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$
- $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0$

Esponenziali: $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.





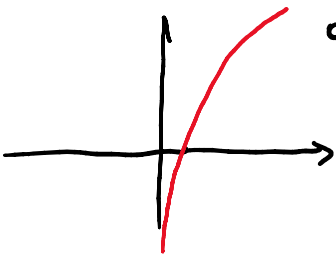


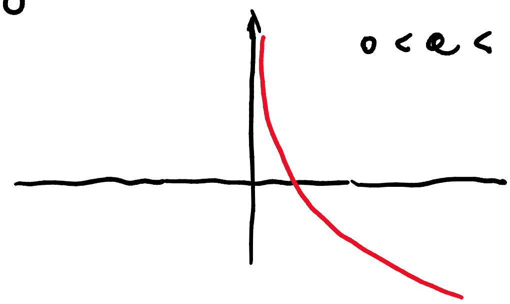
- $\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 1 & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1 . \end{cases}$

- $\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$

- $\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0} \quad \forall \ x_0 \in \mathbb{R}.$

Logaritmi $f(x) = \log_a x$ $\quad a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$





$\mathrm{Dom}(f) = (0, +\infty)$

$D(\mathrm{Dom}(f)) = [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$

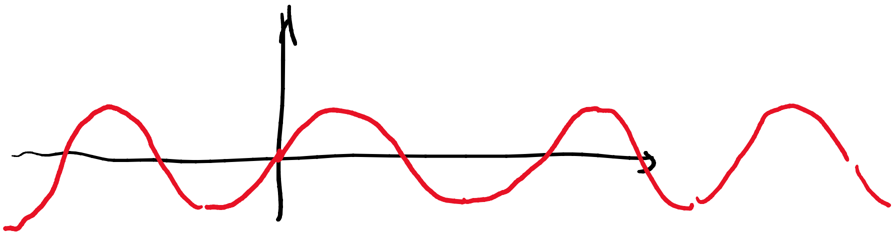
- $\lim_{x \to +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$

- $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$

- $\lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_e x_0 . \quad \forall x_0 \in (0, +\infty)$

- **Seno:**

$f(x) = \sin x$

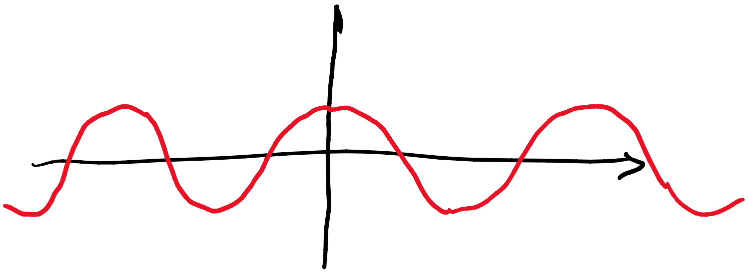


$\lim_{x \to +\infty} \sin x \quad \nexists$

e $\lim_{x \to -\infty} \sin x \quad \nexists$

$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0 .$

Coseno:

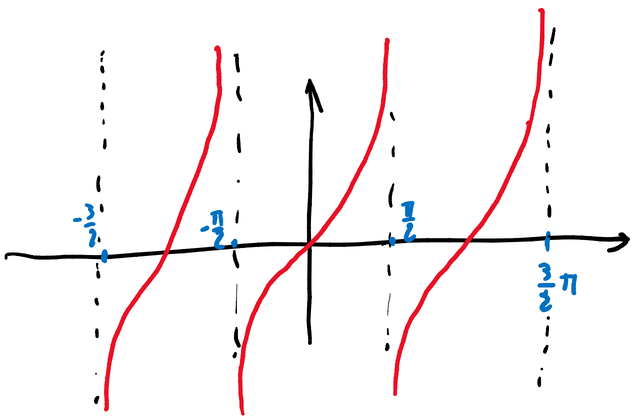


$\lim_{x \to +\infty} \cos x \quad \nexists$

$\lim_{x \to -\infty} \cos x \quad \nexists$

$\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0 \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R} .$

tangente



$\lim_{x \to +\infty} \tan x \quad \nexists$

$\lim_{x \to -\infty} \tan x \quad \nexists$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$

$\left(\lim_{x \to (\frac{\pi}{2}+k\pi)^-} \tan x = +\infty \qquad \forall k \in \mathbb{Z} \right)$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty \qquad \left(\lim_{x \to (\frac{\pi}{2}+k\pi)^+} \tan x = -\infty \quad \forall k \in \mathbb{Z} \right)$

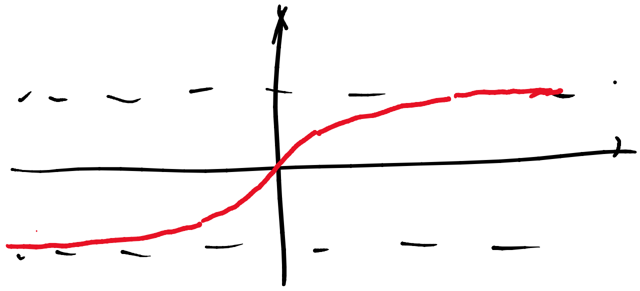
$\lim_{x \to x_0} \tan x = \tan x_0 \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

Arcotangente

$f(x) = \arctan x$

$\lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \quad \left(\frac{\pi}{2}^-\right)$

$\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2} \quad \left(-\frac{\pi}{2}^+\right)$



$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \to x_0} \arctan x = \arctan x_0 .$